LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

SUR UN ANALYSEUR DE MOBILITÉ POUR LES IONS GAZEUX
II. INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR FINIE DU MANCHON

Par PAUL LANGEVIN.

Sommaire. — Étude théorique du mouvement d'un gaz entraîné par un manchon cylindrique épais percé de fentes horizontales, tournant autour de son axe vertical, entre deux cylindres coaxiaux, suivie de l'étude du champ électrostatique entre le manchon et les cylindres conducteurs, pris comme électrodes.

Les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction vitesse s'obtiennent, en tenant compte des conditions aux limites, par un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Un choix convenable d'un nombre limité d'inconnues et d'équations donne une solution approchée suffisante pour calculer les corrections à apporter au cas du manchon infiniment mince déjà résolu dans la première Partie de ce travail par une méthode différente.

Un raisonnement très analogue s'applique au problème électrostatique.

Influence sur le mouvement d'entraînement du gaz. — L'influence de l'épaisseur du manchon a un double aspect puisqu'elle s'exerce sur le mouvement d'entraînement du gaz et sur la distribution du champ électrique. Examinons d'abord le premier de ces deux points de vue.

Nous substituerons ici aussi, au problème cylindrique, sans changer l'ordre de grandeur des résultats, le problème plan d'une grille composée de barreaux parallèles de section rectangulaire, de largeur b et d'épaisseur $2c$, séparés par des intervalles, les fentes f, de largeur a, se mouvant parallèlement aux barreaux avec la vitesse uniforme v_0 dans le milieu visqueux situé entre deux plateaux immobiles parallèles à la grille et situés de part et d'autre de celle-ci à une même distance d du plan médian qui sépare en deux moitiés égales l'épaisseur de chacun des barreaux.

La figure 6 représente la section de ce système par un plan P perpendiculaire à la direction des barreaux et, par conséquent, à celle du mouvement de la grille. Dans le mouvement laminaire qu'il s'agit d'étudier, la vitesse v du fluide entraîné sera en tout point parallèle à cette même direction et dépendra seulement des deux coordonnées x et y de la projection du point sur le plan P. Cette vitesse devra s'annuler sur la surface des plans fixes et devenir égale à v_0 en tout point de la surface des barreaux. Dans la figure 6, on a supposé, comme

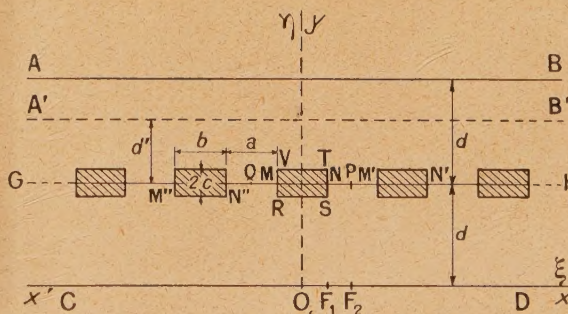


Fig. 6.

précédemment, la largeur de ceux-ci égale à celle des fentes qui les séparent, mais la solution que nous allons obtenir n'implique pas cette hypothèse particulière.

Pour faciliter la comparaison entre cette solution et celle, toute différente, du problème précédent, qui représente le cas limite du problème actuel lorsqu'on y suppose la grille infiniment mince et la distance d grande par rapport à la période $a + b$

du réseau plan que représente cette grille, nous conserverons les notations (22) en y ajoutant les suivantes :

$$\frac{\pi c}{a+b} = \varepsilon, \qquad \sigma = e^{-2\varepsilon}. \qquad (22^{bis})$$

Je n'ai pas réussi à obtenir la solution du problème en considérant immédiatement dans son ensemble tout le domaine compris entre les plans fixes AB et CD, mais j'ai pu tourner la difficulté en remarquant que le plan médian de la grille, GH, est un plan de symétrie pour le système en même temps que pour l'ensemble des données du problème et que, si la solution est obtenue pour une des moitiés du système, celle qui est comprise entre CD et GH, par exemple, celle qui concerne l'autre moitié s'en déduira immédiatement par mirage dans le plan médian. Les conditions aux limites pour le nouveau domaine sont faciles à définir : la fonction harmonique v de x et y doit être nulle en tout point de CD, égale à v_0 sur la surface des demi-barreaux, c'est-à-dire sur les demi-rectangles tels que MRSN (*fig.* 6) et, d'autre part, par raison de symétrie et de continuité, $\frac{\partial v}{\partial y}$ doit être nul en tout point des segments tels que NM′. Il en est de même de $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ si v est considéré comme fonction de ξ et de η.

Prenons pour origine, dans le plan P, le point O situé sur CD en face du milieu de la largeur d'un des barreaux, MN par exemple, pour axe des x la droite CD et pour axe des y la perpendiculaire menée par O à CD dans le plan P.

Pour trouver quelle forme peut prendre la solution, remarquons, comme nous l'avons déjà fait à propos du problème de la grille infiniment mince, que la structure périodique de la grille impose à cette solution d'être elle-même périodique en x avec la période $a+b$, c'est-à-dire en ξ avec la période π. D'autre part, la symétrie du système par rapport à Oy impose à la solution d'être une fonction paire, de x et, par conséquent, de ξ. Le développement de v en série de Fourier doit donc être de la forme

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \cos 2n\xi. \qquad (37)$$

Les Y_n sont des fonctions de y et, par conséquent, de v. La fonction v devant s'annuler en tout point de CD, c'est-à-dire quel que soit ξ quand η est nul, chaque Y doit être nul en même temps que η.

On déduit de (37)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\sum 4n^2 Y_n \cos 2\pi\xi$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \sum \frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} \cos 2\pi\xi.$$

La condition que v soit fonction harmonique devient

$$\sum \left(\frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} - 4n^2 Y_n \right) \cos 2\pi\xi = 0$$

et impose, pour être satisfaite quel que soit ξ, que Y_n satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 Y_n}{d\eta^2} - 4n^2 Y_n = 0, \qquad (38)$$

dont l'intégrale générale est, quand l'entier positif n est différent de zéro,

$$Y_n = C_n \operatorname{sh} 2n\eta + D_n \operatorname{ch} 2n\eta;$$

Y_n devant être nul en même temps que η, il en résulte que D_n est nul.

Pour n égal à zéro, l'équation (38) devient

$$\frac{d^2 Y_0}{d\eta^2} = 0.$$

D'où

$$Y_0 = C_0 \eta + D_0,$$

avec D_0 nul pour que Y_0 s'annule en même temps que η.

Le développement de v en série de Fourier est donc nécessairement de la forme

$$v = C_0 \eta + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sh} 2n\eta \cos 2n\xi. \qquad (39)$$

Les constantes A_0 et $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ vont être déterminées par les conditions aux limites sur le bord supérieur GH du domaine.

Nous aurons intérêt, pour la commodité des applications, à poser

$$C_0 = \frac{A_0}{\delta}, \qquad C_n = \frac{A_n}{\operatorname{sh} 2n\delta}$$

et à prendre les constantes A_n pour inconnues. Le développement (39) devient ainsi

$$v = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos 2n\xi. \qquad (40)$$

Cherchons quelles relations entre les A_n sont nécessaires pour traduire les conditions aux limites sur le bord supérieur de notre domaine. En raison de la périodicité de celui-ci dans la direction des x, il nous suffira d'envisager la portion RSNPM′ de ce bord supérieur (*fig.* 6). Cette portion se compose de trois parties : RS, SN et NM′ qui nous conduiront respectivement à trois groupes indépendants d'équations.

Groupe I. — v doit être égal à v_0 sur RS quel que soit x ou ξ.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les coefficients du développement de v en série de Fourier sur le segment RS soient tous nuls, sauf le premier qui doit être égal à v_0.

Comme v est fonction paire de ξ et que cette variable prend en R et S respectivement les valeurs $-\frac{\pi\rho}{2}$ et $+\frac{\pi\rho}{2}$, ce développement est nécessairement de la forme

$$v=\sum_{m=0}^{\infty} V_m \cos\frac{2m\xi}{\rho}. \qquad (41)$$

D'autre part, comme, sur le segment RS, η est égal à $\delta-\varepsilon$, l'expression (40) devient

$$v=A_0\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\frac{\operatorname{sh}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}\cos 2n\xi. \qquad (42)$$

La relation (41) donne, par le procédé bien connu de multiplication des deux membres par $\cos\frac{2m\xi}{\rho}$ et intégration par rapport à ξ entre les limites $-\frac{\pi\rho}{2}$ et $+\frac{\pi\rho}{2}$, ou, ce qui revient au même en raison de la parité de v, entre les limites zéro et $\frac{\pi\rho}{2}$,

$$V_m=2\int_0^{\frac{\pi\rho}{2}} v\cos\frac{2m\xi}{\rho}\,d\xi,$$

pour les valeurs entières de m depuis 1 jusqu'à l'infini, et

$$V_0=\frac{2}{\pi\rho}\int_0^{\frac{\pi\rho}{2}} v\,d\xi,$$

pour m égal à zéro.

En remplaçant dans les intégrales v par l'expression (42) et en écrivant que V_0 doit être égal à v_0 et V_m nul pour les autres valeurs de m, depuis 1 jusqu'à l'infini, on obtient le premier groupe d'équations linéaires en A_n

$$\left.\begin{aligned} v_0&=A_0\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}+\frac{1}{\pi\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}\frac{\operatorname{sh}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}\sin n\pi\rho,\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nA_n}{n^2\rho^2-m^2}\frac{\operatorname{sh}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}\sin n\pi\rho=0 \quad (m \geqq 1).\end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Ces équations se simplifient dans deux cas particuliers intéressants :

Pour la grille infiniment mince, ε est nul et (43) devient

$$\left.\begin{aligned} v_0&=A_0+\frac{1}{\pi\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}\sin n\pi\rho,\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nA_n}{n^2\rho^2-m^2}\sin n\pi\rho=0.\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Si d est assez grand par rapport à $a+b$ pour que δ soit supérieur à quelques unités, on a

$$\frac{\operatorname{sh}2(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2\delta}=e^{-2\varepsilon}=\sigma$$

et (43) devient

$$\left.\begin{aligned} v_0&=A_0\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}+\frac{1}{\pi\rho}\sum_{1}^{\infty}\frac{A_n\sigma^n}{n}\sin n\pi\rho,\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{nA_n\sigma^n}{n^2\rho^2-m^2}\sin n\pi\rho=0,\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

(44) est évidemment le cas limite de (45) pour $\varepsilon=0$ ou $\sigma=1$.

Groupe II. — Un procédé analogue va nous conduire au groupe d'équations exprimant la condition que $\frac{\partial v}{\partial\eta}$ soit nul sur le segment NM′, quel que soit ξ entre la valeur $\frac{\pi}{2}\rho$ qui correspond au point N et la valeur $\pi-\frac{\pi}{2}\rho$ qui correspond au point M′. Il sera commode de poser

$$\xi=\frac{\pi}{2}+\xi',$$

ξ' variant entre $-\frac{\pi}{2}(1-\rho)$ et $+\frac{\pi}{2}(1-\rho)$.

La droite F_2P qui correspond à ξ égal à $\frac{\pi}{2}$ étant, comme OY, un axe de symétrie binaire pour le système, $\frac{\partial v}{\partial\eta}$ doit être fonction paire de ξ' comme de ξ et doit se développer en série sur le segment N′M sous la forme

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\sum_{m=0}^{\infty}V'_m\cos\frac{2m\xi'}{1-\rho},$$

avec la condition nécessaire et suffisante que tous les V'_n, y compris V'_0, s'annulent pour que $\frac{\partial v}{\partial\eta}$ s'annule en tout point de NM′. Cela se traduit par les équations, pour toutes les valeurs entières de m depuis zéro jusqu'à l'infini,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}(1-\rho)}\frac{\partial v}{\partial\eta}\cos\frac{2m\xi'}{1-\rho}=0. \qquad (46)$$

D'autre part, l'expression (40) de v donne

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{A_0}{\delta}+\sum_{n=1}^{\infty}2nA_n\frac{\operatorname{ch}2\pi\eta}{\operatorname{sh}2n\delta}\cos 2n\xi$$

ou, en donnant à η la valeur δ qu'il a sur NM′ et en remplaçant ξ par $\frac{\pi}{2}+\xi'$

$$\frac{\partial v}{\partial\eta}=\frac{A_0}{\delta}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nA_n\coth 2n\delta\cos 2n\xi'.$$

En remplaçant $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ par cette expression dans les équations (46) et en effectuant les intégrations, on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_0}{\delta}+\frac{2}{\pi(1-\rho)}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n A_n \coth 2n\delta \sin n\pi(1-\rho)=0,\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2(1-\rho)^2-m^2}\coth 2n\delta \sin n\pi(1-\rho)=0. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Quand δ est assez grand, les cotangentes hyperboliques sont pratiquement égales à l'unité, et le groupe (47) devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_0}{\delta}+\frac{2}{\pi(1-\rho)}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n A_n \sin n\pi(1-\rho)=0,\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2(1-\rho)^2-m^2}\sin n\pi(1-\rho)=0. \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Ces équations s'appliquent, sans modification, au cas de la grille infiniment mince.

Groupe III. — Prenons maintenant la portion SN du contour supérieur de notre domaine (*fig.* 6) sur laquelle v doit prendre la valeur v_0 quel que soit η. Comme ξ y est partout égal à $\frac{\pi}{2}\rho$, le développement (40) y devient

$$v = A_0\frac{\eta}{\delta}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\operatorname{sh}2n\eta}{\operatorname{sh}2n\delta}\cos n\pi\rho.$$

Sur le segment SN, η varie depuis $\delta-\varepsilon$ jusqu'à δ, ou, si nous posons

$$\eta=\delta-x,$$

x varie entre zéro et ε. Le développement (48) devient

$$v=A_0-\frac{A_0 x}{\delta}+\sum_{1}^{\infty}A_n\frac{\operatorname{sh}2n(\delta-x)}{\operatorname{sh}2n\delta}\cos n\pi\rho. \quad (49)$$

Le développement en série d'une fonction arbitraire de x entre zéro et ε est de la forme

$$v=\sum_{0}^{\infty}V_m\cos\frac{2m\pi}{\varepsilon}x+\sum_{1}^{\infty}U_m\sin\frac{2m\pi}{\varepsilon}x$$

et, pour que v prenne la valeur v_0 quel que soit x entre zéro et ε, il est nécessaire et suffisant que V_0 soit égal à v_0 et que tous les V_m et U_m soient nuls pour toutes les valeurs de l'entier m depuis 1 jusqu'à l'infini. D'où les équations

$$\left.\begin{aligned} &v_0=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}v\,dx,\\ &\int_0^{\varepsilon}v\cos\frac{2m\pi}{\varepsilon}x\,dx=0,\\ &\int_0^{\varepsilon}v\sin\frac{2m\pi}{\varepsilon}x\,dx=0. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

En remplaçant v par son expression (49) et en effectuant les intégrations, on obtient le groupe d'équations linéaires entre les A_n :

$$\left.\begin{aligned} &v_0=\left(1-\frac{\varepsilon}{2\delta}\right)A_0\\ &\quad+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{1}\frac{\cos n\pi\rho}{n}\,\frac{\operatorname{ch}2n\delta-\operatorname{ch}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}A_n,\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2+m^2\pi^2}\,\frac{\operatorname{ch}2n\delta-\operatorname{ch}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}A_n=0,\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2+m^2\pi^2}\left[1-\frac{\operatorname{sh}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}\right]A_n=0\\ &\qquad(m\geqq 1). \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Si δ est grand, ceci se réduit à

$$\left.\begin{aligned} &v_0=\left(1-\frac{\varepsilon}{2\delta}\right)A_0+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\rho}{n}(1-\sigma^n)A_n,\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{n\cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2+m^2\pi^2}(1-\sigma^n)A_n=0,\\ &\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos n\pi\rho}{n^2\varepsilon^2+m^2\pi^2}(1-\sigma^n)A_n=0\\ &\qquad(m\geqq 1). \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Quand on passe au cas limite de la grille infiniment mince, ε tendant vers zéro, σ qui est égal à $e^{-2\varepsilon}$ tend vers 1 et l'on constate facilement que seule subsiste la première équation de l'un ou l'autre des groupes (51) et (52) sous la forme

$$v_0=A_0+\Sigma A_n\cos n\pi\rho, \quad (53)$$

qui signifie simplement, comme on peut le vérifier sur le développement (40), que v doit prendre la valeur v_0 au point N (*fig.* 3) pour lequel ξ est égal à $\frac{\pi}{2}\rho$ et η égal à δ. C'est en effet à ce seul point que se réduit le segment SN (*fig.* 6) quand l'épaisseur des barreaux diminue indéfiniment.

Cette équation (53) doit d'ailleurs être considérée comme une conséquence des équations (44), qui se rapportent à ce même cas de la grille infiniment mince et qui expriment la condition que v soit égal à v_0 en tout point de MN (*fig.* 3) et au point N en particulier. Il ne subsiste donc, dans ce cas particulier, que les deux groupes (44) et (48) d'équations indépendantes.

L'ensemble des trois groupes (43) (47) et (51) représente un système d'un nombre infini d'équations linéaires à une infinité d'inconnues A_n. Bien qu'il ne m'ait pas été possible d'en obtenir une solution directe et complète, j'ai pu cependant m'assurer qu'il permet d'obtenir de notre problème une solution aussi approchée qu'on le désire en limitant le nombre des inconnues et en choisissant convenablement un nombre égal d'équations. Par

exemple, on conservera seulement les n premières inconnues depuis A_0 jusqu'à A_{n-1} et l'on conservera également les premières équations de chacun des trois groupes jusqu'à concurrence du nombre total n. Quand il s'agit, comme c'est le cas pour nous, d'obtenir seulement un ordre de grandeur d'écarts ou de termes correctifs, il n'est pas nécessaire de pousser bien loin l'application de ce procédé pour obtenir une approximation très suffisante. Je voudrais le montrer en comparant les résultats que donne cette solution dans le cas limite de la grille infiniment mince à la solution rigoureuse que nous avons pu obtenir directement de ce cas limite en étudiant l'influence de la largeur des fentes. Je me limiterai d'ailleurs au cas particulier pour lequel nous avons fait l'application numérique de cette solution rigoureuse, celui où la largeur a des fentes est égale à celle b des barreaux, ρ devenant égal à $\frac{1}{2}$.

Nous avons déjà remarqué, d'ailleurs, que pour la grille infiniment mince, il ne subsiste que les deux groupes d'équations (44) et (48) qui se simplifient quand on y fait ρ égal à $\frac{1}{2}$. Il convient d'opérer avec quelque précaution ce passage à la limite. Prenons d'abord le groupe (44); il devient

$$v_0 = A_0 + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{A_n}{n}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$\sum_1^\infty \frac{nA_n}{n^2-4m^2}\sin\frac{n\pi}{2} = 0.$$

La somme qui figure dans la première de ces équations ne donne lieu à aucune difficulté. Le sinus qui y figure n'est différent de zéro que pour les valeurs impaires $2p+1$ de n et prend alors la valeur $(-1)^p$; dans chacune des sommes qui figurent dans les autres équations un autre terme que ceux de rang impair est différent de zéro : c'est celui pour lequel n prend la valeur paire $2m$, qui annule le dénominateur en même temps que le sinus. Pour trouver la vraie valeur de ce terme, il suffit d'y faire tendre n vers $2m$. On obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= A_0 + \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p}{2p+1}A_{2p+1},\\ A_{2m} &+ \frac{4}{\pi}(-1)^m\sum_0^\infty \frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2-4m^2}A_{2p+1} = 0.\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

De même, le groupe (48) devient, quand on y remplace ρ par la valeur particulière $\frac{1}{2}$,

$$\frac{A_0}{\delta} + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty (-1)^n A_n \sin\frac{n\pi}{2} = 0,$$

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n n^2 A_n}{n^2-4m^2}\sin\frac{n\pi}{2} = 0.$$

Si l'on tient compte des mêmes remarques que ci-dessus, on obtient finalement

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^\infty (-1)^p A_{2p+1} = 0,\\ A_{2m} - \frac{2}{m\pi}(-1)^m\sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p(2p+1)^2}{(2p+1)^2-4m^2}A_{2p+1} = 0.\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

Si l'on combine par soustraction chaque équation de la seconde ligne de ce groupe avec l'équation correspondante de la seconde ligne du groupe (54), on obtient pour remplacer (55) le groupe plus simple

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^\infty (-1)^p A_{2p+1} = 0,\\ \sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p(2p+1)}{2p+1-2m}A_{2p+1} = 0.\end{aligned}\right\}\quad(56)$$

L'aspect de ce dernier groupe qui renferme uniquement les inconnues d'indice impair à côté de A_0, montre comment il est raisonnable de procéder dans le choix des équations, à un ordre déterminé d'approximation. Si le nombre des inconnues auquel on se limite est pair et égal à $2p+2$ depuis A_0 jusqu'à A_{2p+1}, le nombre des inconnues d'indice impair est $p+1$ et, pour les déterminer en fonction de A_0 il est tout indiqué de prendre, dans le groupe (56), ce même nombre $p+1$ d'équations, à savoir celle de la première ligne et p équations de la seconde ligne, depuis $m=1$ jusqu'à $m=p$ inclusivement.

Le système ainsi constitué étant résolu et donnant les inconnues d'indice impair en fonction de A_0, la première équation du groupe (54), après substitution, ne contiendra plus que A_0 qu'elle déterminera, et enfin, les p premières équations de la seconde ligne du groupe (54) donneront immédiatement chacune une des inconnues d'indice pair, depuis A_2 jusqu'à A_{2p} en y faisant varier m depuis 1 jusqu'à p.

Si le nombre d'inconnues auquel on se limite est impair, depuis A_0 jusqu'à A_{2p+2}, on procédera exactement comme il vient d'être indiqué pour avoir les $2p+2$ premières inconnues depuis A_0 jusqu'à A_{2p+1}, c'est-à-dire qu'on prendra simplement les résultats de l'approximation paire précédente et l'on y adjoindra A_{2p+2} tiré de l'équation (53) qui, pour ρ égal à $\frac{1}{2}$, ne renferme plus que les inconnues d'indice pair puisqu'elle devient, dans ce cas,

$$v_0 = A_0 + \sum_1 (-1)^p A_{2p} = \sum_0 (-1)^p A_{2p}.$$

Ainsi donc, pour obtenir l'approximation d'ordre pair $2p+2$ ou impair $2p+3$, il suffit de résoudre le système d'équations linéaires à $p+1$ inconnues que représente le groupe (56) quand on le limite comme il a été dit.

La comparaison des résultats ainsi obtenus avec ceux de la première solution représentée par les formules (25) et (30) se fera, par exemple en calculant v_p ainsi que l'intégrale

$$\int_0^\delta (v_1 - v_2)\,d\eta.$$

Pour ces quantités, la première solution nous a donné (¹)

$$\left.\begin{aligned} v_0 - v_p &= \frac{Y_p}{\delta + L\sqrt{2}}\,v_0 = \frac{0{,}880}{\delta + 0{,}346}\,v_0 \\ \text{et}\quad \int_0^\delta (v_1 - v_2)\,d\eta &= \frac{0{,}314\,v_0}{\delta + 0{,}346}. \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

La solution actuelle nous permet d'exprimer ces mêmes quantités en fonction des A_n. Pour ce qui concerne le point P, milieu d'une fente, de coordonnées

$$\xi = \frac{\pi}{2}, \qquad \eta = \delta,$$

le développement (40) donne

$$v_P = A_0 + \sum_1^\infty (-1)^n A_n = \sum_0^\infty (-1)^n A_n. \quad (58)$$

Pour évaluer l'intégrale, nous déduisons du développement (40) les expressions suivantes de v_1 et de v_2 qui s'obtiennent en donnant à ξ respectivement les valeurs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$:

$$v_1 = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{p=1}^\infty (-1)^p \frac{\operatorname{sh} 4p\eta}{\operatorname{sh} 4p\delta} A_{2p},$$

$$v_2 = A_0 \frac{\eta}{\delta} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} A_n.$$

En intégrant par rapport à η entre zéro et δ, on obtient

$$\int_0^\delta v_1\,d\eta = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{p=1}^\infty (-1)^p \frac{\operatorname{ch} 4p\delta - 1}{4p \operatorname{sh} 4p\delta} A_{2p}$$

et

$$\int_0^\delta v_2\,d\eta = A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - 1}{2n \operatorname{sh} 2n\delta} A_n.$$

Quand δ est suffisamment grand, ces expressions se réduisent à

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\delta v_1\,d\eta &= A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{p=1}^\infty \frac{(-1)^p}{4p} A_{2p}, \\ \int_0^\delta v_2\,d\eta &= A_0 \frac{\delta}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n} A_n. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

(¹) L, logarithme népérien.

Voyons maintenant quels sont les résultats de nos approximations successives obtenues en utilisant, comme il a été dit, les équations (54) et (56). Pour la commodité des calculs, il y a intérêt à introduire, au lieu des A_n, des inconnues auxiliaires x_n définies par

$$x_{2p} = (-1)^p A_{2p}, \qquad x_{2p+1} = (-1)^p \frac{4(2p+1)}{\pi} A_{2p+1}.$$

Les équations entre les x_n prennent ainsi la forme

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= x_0 + \sum_{p=0} \frac{x_{2p+1}}{2(2p+1)^2}, \\ x_{2m} &+ \sum_{p=0} \frac{x_{2p+1}}{(2p+1)^2 - 4m^2} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

$$\frac{x_0}{\delta} = \sum_{p=0} \frac{x_{2p+1}}{2p+1}, \qquad \sum_{p=0} \frac{x_{2p+1}}{2p+1-2m} = 0. \quad (61)$$

L'équation complémentaire (53) devenant

$$v_0 = \sum_{p=0} x_{2p}.$$

Il est remarquable qu'on obtienne une approximation déjà très bonne en conservant un très petit nombre d'inconnues. Prenons-en, par exemple, quatre seulement : x_0, x_1, x_2, x_3 entre lesquelles le système (60), (61) devient

$$v_0 = x_0 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{18}, \qquad x_2 - \frac{x_1}{3} + \frac{x_3}{5} = 0;$$

$$\frac{x_0}{\delta} = x_1 + \frac{x_3}{3}, \qquad x_1 - x_3 = 0.$$

La résolution de ce système permet de remonter aux inconnues A reliées aux x par

$$A_0 = x_0, \qquad A_2 = -x_2, \qquad A_1 = \frac{\pi}{4} x_1, \qquad A_3 = -\frac{\pi}{12} x_3$$

et d'en déduire, par application des formules (58) et (59),

$$v_0 - v_P = v_0 - A_0 + A_1 - A_2 + A_3,$$

$$\int_0^\delta (v_1 - v_2)\,d\eta = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{6}.$$

Des calculs numériques très simples conduisent ainsi à

$$v_0 - v_P = \frac{0{,}909\,v_0}{\delta + 0{,}417},$$

$$\int_0^\delta (v_1 - v_2)\,d\eta = \frac{0{,}312\,v_0}{\delta + 0{,}417},$$

ce qui, comparé à (57), montre combien notre méthode d'approximations successives conduit rapidement à des évaluations suffisantes. L'épreuve que nous faisons ainsi subir à cette méthode dans le cas particulier de la grille infiniment mince, pour lequel une autre solution plus directe nous était connue,

peut nous donner confiance dans les résultats qu'elle va nous fournir pour une grille d'épaisseur finie.

Appliquons les formules générales (45), (48) et (52) relatives au cas où la distance d est assez grande par rapport à $a+b$, en supposant a égal à b, ou ρ égal à $\frac{1}{2}$. On obtient immédiatement les groupes

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= A_0 + \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\sigma^{2p+1}}{2p+1}A_{2p+1},\\ \frac{(-1)^m}{\pi}&\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(2p+1)\sigma^{2p+1-2m}}{(2p+1)^2-4m^2}A_{2p+1}+A_{2m}=0;\end{aligned}\right\}\quad(63)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} &= \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^pA_{2p+1},\\ \frac{2(-1)^m}{m\pi}&\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p(2p+1)^2}{(2p+1)^2-4m^2}A_{2p+1}-A_{2m}=0.\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

Ce groupe (64), combiné par addition de sa seconde ligne avec la seconde ligne de (63), permet de lui substituer le groupe plus simple

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_0}{\delta} &= \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^pA_{2p+1},\\ \sum&\frac{(-1)^p(2p+1)}{(2p+1)^2-4m^2}\left(\sigma^{2p+1-2m}+\frac{2p+1}{2m}\right)A_{2p+1}=0,\end{aligned}\right\}\quad(65)$$

où ne figurent plus, à côté de A_0, que les inconnues d'indice impair.

Le groupe (52) devient, quand on y fait ρ égal à $\frac{1}{2}$,

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= \left(1-\frac{\varepsilon}{2\delta}\right)A_0+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\frac{(1-\sigma^{2p})}{2p}A_{2p},\\ &\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p(1-\sigma^{2p})}{4p^2\varepsilon^2+m^2\pi^2}A_{2p}=0,\\ &\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p p(1-\sigma^{2p})}{4p^2\varepsilon^2+m^2\pi^2}A_{2p}=0.\end{aligned}\right\}\quad(66)$$

Ce groupe joue, pour les inconnues d'indice pair, le même rôle que le précédent pour les inconnues d'indice impair.

Nous tirerons les conséquences de ces formules quand nous aurons résolu, pour la grille d'épaisseur finie située entre deux plateaux symétriques par rapport à elle, le problème de la distribution du champ électrique.

Distribution du champ électrique. — La grille et les plateaux étant supposés portés à des potentiels donnés, le problème de la distribution du potentiel et du champ correspondant se pose exactement comme le problème précédent et se ramène à la recherche d'une fonction harmonique dans le plan P prenant des valeurs données sur les limites du domaine compris entre la grille et les plateaux. Lorsque ceux-ci sont supposés portés au même potentiel, que nous pouvons prendre pour origine et supposer nul, la solution précédente s'applique exactement, le potentiel électrique U remplaçant la vitesse du gaz v.

Le problème électrique qui concerne notre appareil est différent et, comme nous le verrons, complémentaire du précédent. Pour que les ions se déplacent dans le même sens avant et après la traversée de la grille, il faut que les plateaux soient portés à des potentiels de signes opposés par rapport à celui de la grille et, plus particulièrement, à des potentiels égaux et opposés pour correspondre à la condition (10) du problème cylindrique. Si nous prenons, tout d'abord, le potentiel de la grille pour origine, la symétrie du système implique que les potentiels en deux points quelconques symétriques par rapport au plan médian GH (*fig.* 6) seront égaux et de signes contraires et, par conséquent, que le potentiel sera nul en tout point de ce plan, c'est-à-dire sur les segments tels que NM′ situés sur GH à l'intérieur des fentes. Ceci nous permet, comme dans le problème précédent, de n'envisager que la moitié du domaine primitif et de résoudre le problème de Dirichlet pour la portion du plan comprise entre CD et un bord supérieur dentelé composé de parties successives telles que MRSNPM′, le potentiel devant s'annuler sur la totalité de ce bord supérieur et prendre une valeur constante sur le bord inférieur rectiligne CD. Il revient d'ailleurs au même, par simple changement de l'origine des potentiels, de supposer le potentiel U nul sur CD et prenant partout une valeur donnée U_1 sur le bord supérieur dentelé du demi-domaine.

En raisonnant exactement comme nous l'avons fait à propos du mouvement du gaz, on voit facilement que le développement en série de la fonction U, à la fois harmonique et périodique en ξ, doit être de la forme, analogue à (40) :

$$U = B_0\frac{\eta}{\delta}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\operatorname{sh}2n\eta}{\operatorname{sh}2n\delta}\cos 2n\xi. \quad(67)$$

La condition que U prenne la valeur U_1 en tout point du segment RS se traduit par un groupe d'équations linéaires entre les B_n exactement analogue au groupe (43)

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= B_0\frac{\delta-\varepsilon}{\delta}+\frac{1}{\pi\rho}\sum_{1}^{\infty}\frac{B_n}{n}\,\frac{\operatorname{sh}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}\sin n\pi\rho,\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nB_n}{n^2\rho^2-m^2}\,\frac{\operatorname{sh}2n(\delta-\varepsilon)}{\operatorname{sh}2n\delta}\sin n\pi\rho=0.\end{aligned}\right\}\quad(68)$$

Le second groupe doit exprimer que U prend la valeur U_1 aussi sur le segment NM′; en procédant comme nous l'avons fait pour obtenir (47), on arrive

facilement à

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= B_0 + \frac{1}{\pi(1-\rho)} \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n} \sin n\pi(1-\rho), \\ &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n B_n}{n^2(1-\rho)^2 - m^2} \sin n\pi(1-\rho) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Enfin la condition que U soit égal à U_1 sur SN devient

$$\left.\begin{aligned} U_1 = {} & \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) B_0 \\ & + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{1}^{\infty} \frac{B_n}{n} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho = 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} \frac{\operatorname{ch} 2n\delta - \operatorname{ch} 2n(\delta - \varepsilon)}{\operatorname{sh} 2n\delta} \cos n\pi\rho = 0. \end{aligned}\right\} \quad (70)$$

Ces équations se simplifient notablement quand on y suppose δ suffisamment grand et ρ égal à $\frac{1}{2}$ pour correspondre au cas particulier où la largeur des fentes est égale à celle des barreaux. Les trois groupes (68), (69), (70) deviennent respectivement

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= B_0 \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \sigma^{2p+1}}{2p+1} B_{2p+1}, \\ (-1)^m B_{2m} &+ \frac{4}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1) \sigma^{2p+1-2m}}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (71)$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= B_0 - \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} B_{2p+1}, \\ (-1)^m B_{2m} &- \frac{4}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) B_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{1}^{\infty} (-1)^p \frac{1 - \sigma^{2p}}{2p} B_{2p}, \\ &\sum_{1}^{\infty} (-1)^p \frac{1 - \sigma^{2p}}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} B_{2p} = 0, \\ &\sum_{1}^{\infty} (-1)^p \frac{p(1 - \sigma^{2p})}{4p^2\varepsilon^2 + m^2\pi^2} B_{2p} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

En retranchant chaque équation du groupe (72) de l'équation correspondante du groupe (71), on obtient, pour remplacer ce dernier, le groupe plus simple

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_0 \varepsilon}{\delta} &= \frac{2}{\pi} \sum \frac{(-1)^p (1 + \sigma^{2p+1})}{2p+1} B_{2p+1}, \\ \sum (-1)^p & \frac{(2p+1)(\sigma^{2m} + \sigma^{2p+1})}{(2p+1)^2 - 4m^2} B_{2p+1} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Le résultat le plus important que puisse nous donner la solution de ce problème de l'influence de l'épaisseur finie de la grille sur la distribution du champ électrique, est celui qui concerne la fraction que laisse passer la grille du nombre total des ions amenés par le champ et dont les trajectoires projetées sur le plan P perpendiculaire au mouvement d'entraînement du gaz, sont les lignes de force du champ électrique contenues dans ce plan P.

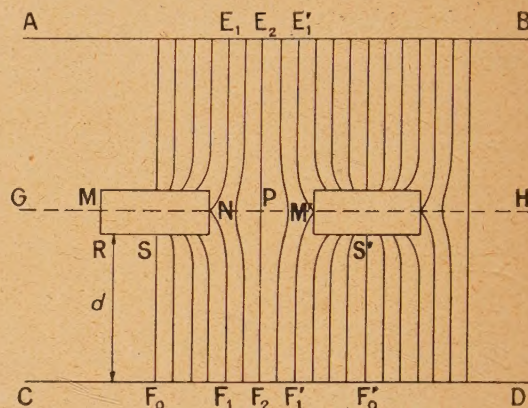


Fig. 7.

Par raison de symétrie, la ligne de force telle que F_2PE_2 (*fig.* 7) n'est pas déformée puisqu'elle passe par le milieu P d'une fente, mais les lignes voisines sont gonflées vers les barreaux, jusqu'à prendre la forme particulière F_1NE_1 qui amène les ions aux barreaux en N. Seuls, les ions émis par la source entre F_1 et F'_1 arrivent à l'électrode en passant par la fente correspondante. Si la distance d est suffisante pour que les lignes de force arrivent rectilignement aux plateaux au voisinage desquels le champ sera par conséquent uniforme, et si l'on suppose que l'extraction des ions se fait uniformément dans la longueur de la fente-source F, le rapport cherché est égal au rapport

$$r = \frac{F_1F_2}{F_0F_2}$$

égal d'ailleurs au rapport des charges électriques situées sur les portions de la surface des plateaux correspondant à F_1F_2 et F_0F_2 respectivement ou encore au rapport des flux de force ou d'induction qui partent de ces surfaces.

Cette remarque nous conduit à faire intervenir la fonction de flux φ, fonction harmonique conjuguée de U et reliée à celle-ci par les conditions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial U}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{\partial U}{\partial\xi}. \quad (75)$$

En remplaçant ici U par son expression géné-

rale (67) et en intégrant, on obtient

$$\varphi = B_0 \frac{\xi}{\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta} \sin 2n\xi, \tag{76}$$

la constante d'intégration est ainsi choisie de manière que φ s'annule en même temps que ξ. La fonction φ est telle que sa valeur reste constante tout le long d'une ligne de force. L'origine des ξ étant en F_0 (*fig.* 7), φ est nul sur la ligne de force F_0S. Si nous désignons par φ_1 et φ_2 les valeurs de φ sur les lignes de force F_1N et F_2P, le rapport cherché a pour valeur

$$r = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2}.$$

La ligne F_1N le long de laquelle φ_1 est constant permet de calculer cette valeur en substituant à ξ et η dans (76) les coordonnées d'un quelconque de ses points et, en particulier, celles du point N qui sont $\frac{\pi}{2}\rho$ et δ; on obtient ainsi

$$\varphi_1 = B_0 \frac{\pi\rho}{2\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \coth 2n\delta \sin n\pi\rho,$$

de même

$$\varphi_2 = B_0 \frac{\pi}{2\delta}.$$

Dans le cas particulier où d est grand par rapport à $a+b$ et où a est égal à b, ces expressions deviennent

$$\varphi_1 = \frac{B_0}{4} \frac{\pi}{\delta} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p B_{2p+1},$$

d'où

$$r = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2} = \frac{1}{2} - \frac{2\delta}{\pi} \sum_{1}^{\infty} (-1)^p \frac{B_{2p+1}}{B_0}.$$

Il est remarquable que ce résultat fasse intervenir seulement celles des inconnues qui figurent dans le groupe (74) d'équations, de sorte qu'il suffit, pour déterminer notre rapport, de conserver et de résoudre le système constitué par ce seul groupe. Dans ce but, il est commode d'introduire de nouvelles variables

$$z_p = \frac{2\delta}{\pi} (-1)^p \frac{B_{2p+1}}{B_0},$$

qui satisfont aux équations, déduites de (74) :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p=0} \frac{1+\sigma^{2p+1}}{2p+1} z_p = \varepsilon, \\ &\sum_{p=0} \frac{(\sigma^{2m}+\sigma^{2p+1})(2p+1)}{(2p+1)^2 - 4m^2} z_p = 0 \\ &\left(r = \frac{1}{2} - \sum_0 z_p\right). \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Pour obtenir une approximation déterminée dans l'évaluation de r, il suffit de conserver $p+1$ inconnues z depuis l'indice zéro jusqu'à l'indice p et de résoudre le système constitué par la première équation (75) et p équations de la seconde ligne pour les valeurs de m depuis 1 jusqu'à p.

Le déterminant du système ainsi constitué est toujours différent de zéro, de sorte que, quand ε est nul (grille infiniment mince) tous les z_p sont nuls et le rapport r prend, comme on pouvait le prévoir, la valeur $\frac{1}{2}$ puisque, dans ce cas, les lignes de force restent rectilignes et que, la largeur des fentes étant supposée égale à celle des barreaux, la moitié des ions issus de la source peuvent traverser la grille.

Déjà la première approximation, dans laquelle on conserve la seule inconnue z_0 et la première équation (75) qui devient

$$(1+\sigma) z_0 = \varepsilon$$

donne pour r une valeur

$$r_1 = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{1+\sigma}, \tag{78}$$

que ne modifient pas notablement les approximations plus élevées tant que l'épaisseur de la grille $2c$ reste sensiblement inférieure à la période $a+b$. Si nous adoptons, par exemple,

$$a = b = 3, \qquad 2c = 1,$$

on a

$$\varepsilon = \frac{\pi c}{a+b} = \frac{\pi}{12}, \qquad \sigma = e^{-2\varepsilon} = 0{,}5924$$

et, d'après (78),

$$r_1 = 0{,}5 - 0{,}164 = 0{,}336,$$

le tiers environ des ions passera à travers la grille.

Étalement des points d'arrivée des ions de même mobilité. — La connaissance du mouvement du gaz et de la distribution du champ électrique nous permet d'évaluer ce que devient l'étalement des points d'arrivée pour des ions d'une même mobilité, du fait de l'existence des fentes dans le manchon d'épaisseur finie. Les trajectoires qui donnent lieu au maximum et au minimum de déplacement des ions sont celles qui se projettent sur le plan P suivant F_1NE_1 et F_2PE_2 respectivement (*fig.* 7). Pour la seconde de ces trajectoires, on a le déplacement

$$l_2 = \frac{2}{k} \int_0^d \frac{v_2}{h_2} \, dy, \tag{79}$$

v_2 est donné par la formule (40) quand on y donne à ξ la valeur $\frac{\pi}{2}$ qui correspond à l'abscisse commune

de tous les points de la droite F_2PE_2, donc

$$v_2 = A_0\frac{\eta}{\delta} + \sum_1^\infty (-1)^n A_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}.$$

Le champ h_2 a pour valeur

$$h = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{a+b}{\pi}\frac{\partial U}{\partial \eta},$$

U étant donné par la formule (67); d'où, pour ξ égal à $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\pi}{a+b} h_2 = \frac{B_0}{\delta} + \sum_1^\infty (-1)^n 2nB_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta},$$

les A et les B s'obtiennent comme il a été indiqué par la résolution des groupes correspondants d'équations linéaires. Connaissant ainsi v_2 et h_2 en fonction de η, on obtiendra l_2 d'après (79) en effectuant l'intégration graphique contenue dans

$$l_2 = \frac{2(a+b)}{\pi k}\int_0^\delta \frac{v_2}{h_2}\,d\eta.$$

Le calcul est un peu plus compliqué pour la trajectoire F_1NE_1, à cause de la forme incurvée de sa projection sur le plan P.

Si v_1 est la vitesse du gaz en un point quelconque de cette trajectoire, on a

$$l_1 = \frac{2}{k}\int_0^d \frac{v_1}{\frac{\partial U}{\partial y}}\,dy = \frac{2(a+b)^2}{\pi^2 k}\int_0^\delta \frac{v_1}{\frac{\partial U}{\partial \eta}}\,d\eta, \quad (80)$$

v_1 et $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ s'obtiennent en fonction de η en donnant à ξ dans les formules

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A_0\frac{\eta}{\delta} + \sum_1^\infty A_n \frac{\operatorname{sh} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\cos 2n\xi \\ \text{et} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= \frac{B_0}{\delta} + \sum_1^\infty 2nB_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\cos 2n\xi, \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

les valeurs qui correspondent à celles de η dans l'équation de la trajectoire projetée F_1NE_2 qui est, comme nous l'avons vu,

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{B_0\xi}{\delta} + \sum_1^\infty B_n \frac{\operatorname{ch} 2n\eta}{\operatorname{sh} 2n\delta}\cos 2n\xi \\ &= \frac{B_0\pi}{4\delta} + \sum_1^\infty (-1)^n B_n \coth 2n\delta = \varphi_1. \quad (82) \end{aligned}$$

La dispersion des points d'arrivée se mesurera par le rapport

$$\frac{l_1 - l_2}{l_0},$$

où l_0 a la valeur (33).

Pour construire la courbe (82) entre ξ et η, il semble nécessaire de construire le réseau des courbes représentant φ en fonction de ξ pour diverses valeurs de η et d'en déduire les valeurs de ξ qui donnent à φ la valeur φ_1 pour chacune de ces valeurs de η. Ces valeurs de ξ portées dans (81) permettent de construire la courbe représentant $\frac{v_1}{\frac{\partial U}{\partial \eta}}$ en fonction de η et d'opérer l'intégration graphique pour avoir l_1 par la formule (80).

LES CELLULES A MULTIPLICATEURS D'ÉLECTRONS. DÉVELOPPEMENTS. UTILISATION

Par ANDRÉ LALLEMAND.
Astronome à l'Observatoire de Paris.

Sommaire. — Détermination de la fluctuation du courant de sortie dans une cellule à multiplicateurs d'électrons en fonction du nombre d'étages et du facteur de multiplication de l'étage, cas idéal. Autres causes de fluctuations du courant, réalisation d'une cellule éliminant au mieux ces fluctuations. Résultats obtenus. Quelques considérations sur l'emploi des cellules à multiplicateurs d'électrons : alimentation haute tension, détermination de la multiplication nécessaire si l'on utilise comme appareil récepteur un galvanomètre ou un amplificateur. Utilisation des cellules à multiplicateurs avec un amplificateur symétrique très stable, utilisation d'un montage à relaxation au néon.

Considérons une cellule photoélectrique éclairée par un flux lumineux Φ_0 elle débite à la saturation un courant $I_0 = K\Phi_0$. Ce courant, souvent très faible, par exemple 10^{-15} A ne peut être mesuré par des méthodes directes, il faut amplifier. Habituellement on utilise un amplificateur à lampes, or cet amplificateur est sensible à la tension et non au courant, on transformera donc le courant en une chute de potentiel RI_0 dans une résistance de charge R. Plus R est grand et plus la transformation est avantageuse, mais avec de grands R on se heurte à des difficultés : la réponse devient lente et le courant grille de la première lampe intervient à son tour; il faut alors prendre des lampes spéciales dites lampes électromètres. Le courant I_0 n'est pas un courant parfaitement continu, il subit des fluctuations ou effet Schottky, qui sont évidemment amplifiées. Ces fluctuations limitent d'une façon fondamentale le plus petit flux lumineux mesurable. Mais il existe une autre source de perturbations très importante dans la résistance de charge R, qui se comporte comme un générateur fournissant une f. é. m. ayant un caractère parfaitement irrégulier, c'est-à-dire que toutes les composantes de fréquences sont également probables et avec la même amplitude. Si l'on considère l'intervalle de fréquences Δf le carré moyen de la tension perturbatrice ou effet Johnson est

$$\overline{E^2} = 4kTR\,\Delta f,$$

k, constante de Boltzmann : $1{,}380.10^{-23}$ W : s par degré;
R, la résistance en ohms;
T, la température absolue ambiante.

Alors que le carré moyen des fluctuations du courant de photocathode est

$$\overline{i^2} = 2eI_0\,\Delta f,$$

$e = 1{,}60.10^{-19}$ Cb, charge de l'électron.

Il est nécessaire de comparer la grandeur de ces deux perturbations. Le courant i crée dans la résistance de charge une différence de potentiel : iR d'où le rapport

$$\gamma = \frac{\overline{i^2}R^2}{\overline{E^2}} = \frac{I_0 R}{\frac{2kT}{e}} = \frac{I_0 R}{5.10^{-2}},$$

c'est-à-dire : l'effet Schottky est égal à l'effet Johnson $\gamma = 1$, si le courant débité par la cellule produit aux bornes de la résistance une différence de potentiel de 5.10^{-2} V.

Donc le plus petit flux lumineux mesurable est toujours masqué par l'effet Johnson de la résistance d'entrée.

Il faut donc chercher à amplifier le courant sans utiliser de résistance de charge. Ce moyen est donné par le multiplicateur d'électrons.

Si I_0 est le courant de photocathode, n le nombre de multiplicateurs et δ le facteur de multiplication, le courant débité par la cellule à multiplicateurs est

$$I = I_0\delta^n.$$

Mais ce courant comporte des fluctuations, nous allons essayer de calculer le plus petit flux lumineux mesurable en nous plaçant dans le cas idéal où il n'existe pas d'autres sources de perturbations que celles provoquées par la nature granulaire de l'électricité.

Nous admettrons :

1° L'émission électronique provenant d'un multiplicateur quelconque suit la loi de Schottky

$$\overline{i^2} = 2eI_0\,\Delta f;$$

2° L'effet Schottky est multiplié par les étages successifs comme n'importe quel signal (toutes les fréquences sont également amplifiées), soit I_0 le courant provenant de la photocathode, sa fluctuation est donnée par

$$\overline{i_0^2} = 2eI_0\,\Delta f.$$

A la sortie du premier multiplicateur le courant est $I_1 = \delta I_0$, sa fluctuation

$$\overline{i_1^2} = 2e\,\delta I_0\,\Delta f + \delta^2(2eI_0\,\Delta f) = 2eI_0\,\Delta f(\delta + \delta^2).$$

A la sortie du $n^{\text{ième}}$ multiplicateur on trouve une perturbation

$$\overline{i_n^2} = 2I_0\,\Delta f[\delta^n + \delta^{n+1} + \ldots + \delta^{2n}]$$
$$= 2I_0\,\Delta f\,\delta^n(1 + \ldots + \delta^n) = 2I_0\,\Delta f\,\delta^n\,\frac{1-\delta^{n+1}}{1-\delta}.$$

La perturbation à l'entrée est donnée par

$$\overline{i_0^2} = 2eI_0\,\Delta f.$$

Le signal à l'entrée par x.

La perturbation à la sortie est donnée par

$$\overline{i_n^2} = 2eI_0\,\Delta f\,\delta^n\,\frac{1-\delta^{n+1}}{1-\delta}.$$

Le signal à la sortie $x\delta^n$.

D'où

$$\frac{\left(\dfrac{\text{signal}}{\text{bruit}}\right)_{\text{entrée}}}{\left(\dfrac{\text{signal}}{\text{bruit}}\right)_{\text{sortie}}} = \left(\frac{1-\delta^{n+1}}{\delta^n(1-\delta)}\right)^{\frac{1}{2}} = A.$$

Cette expression permet de calculer la perturbation apportée par le système multiplicateur.

Considérons quelques cas numériques :

$\delta = 2$, $n = 1$, on trouve $A = \sqrt{1{,}5}$;
$\delta = 2$, $n = 7$, » $A = \sqrt{2}$;
$\delta = 4$, $n = 1$, » $A = \sqrt{1{,}25}$;
$\delta = 4$, $n = 7$, » $A = \sqrt{1{,}3}$.

C'est-à-dire que le rapport $\left(\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}\right)$ entrée est toujours plus grand que $\left(\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}\right)$ sortie. Une cellule à multiplicateurs ne peut améliorer le rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ d'une couche photosensible. La multiplication ajoute d'autant moins de perturbations que δ est plus grand et qu'il y a moins de multiplicateurs. Mais pratiquement les perturbations supplémentaires produites par ce mode d'amplification sont négligeables dès que $\delta > 2$, quel que soit le nombre d'étages (dans le cas idéal où nous nous sommes placés).

Le grand intérêt de la cellule à multiplicateurs d'électrons est de rendre accessible aux mesures les très faibles courants photoélectriques, sans y ajouter des perturbations importantes. Mais si l'on a affaire à des flux lumineux suffisamment intenses pour pouvoir mesurer ces courants sans amplifications ou si le courant photoélectrique produit une chute de tension supérieure à 5.10^{-2} V dans la résistance de charge, la cellule à multiplicateurs perd de son intérêt.

Nous montrerons plus loin qu'une multiplication élevée ne peut compenser une faible sensibilité de la photocathode.

Nous nous sommes placés dans le cas idéal. Malheureusement la cellule à multiplicateurs possède d'autres sources de perturbations et les recherches que nous avons entreprises ont pour but d'annuler ou de diminuer ces perturbations, tout en conservant un facteur δ assez grand et une multiplication totale élevée.

Une qualité essentielle est de posséder une photocathode à haut rendement, or s'il est délicat de réaliser des photocathodes très sensibles, il devient très peu probable d'obtenir une activation optimum, dans un même tube, pour la photocathode et les cibles multiplicatrices. Nous avons ainsi été amenés à choisir pour cibles multiplicatrices un alliage argent-magnésium qui peut être activé séparément, en partie, en dehors de la cellule; lorsque l'activation est terminée on porte toute son attention sur la réalisation de la photocathode. On arrive ainsi avec une source lumineuse à 2500° K à obtenir 80 à 100 μA : lumen pour des cathodes antimoine-césium. L'alliage Ag-Mg possède en outre plusieurs propriétés avantageuses : il n'est pas photoélectrique et son émission thermique à la température ordinaire est nulle.

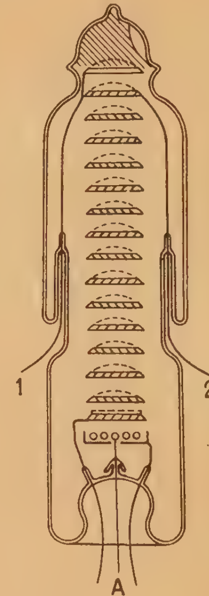


Fig. 1.

Le système employé pour assurer les trajectoires correctes des électrons de cibles en cibles doit être aussi peu que possible sensible aux causes qui font dévier les électrons et leur font manquer les cibles multiplicatrices, elles ont pour origine des champs parasites électrostatiques et magnétiques. Les champs électrostatiques parasites qui se produisent à l'intérieur de la cellule sont particulièrement néfastes et sont souvent produits par les diélectriques se trouvant au voisinage des cibles (parois de la cellule, séparateurs en mica, tiges de verre de fixation). Ils se chargent à des potentiels inconnus et créent des champs incontrôlables. Nous avons été ainsi amenés à choisir un montage où tous ces isolants étaient

supprimés (sauf évidemment la paroi de l'ampoule dont l'action sera minimisée).

Les cibles multiplicatrices sont faites de trames semi-transparentes (*fig.* 1), placées les unes derrière les autres à des distances aussi faibles que possible; même assez fortement déviés les électrons ne peuvent pas manquer les cibles, leur concentration vers l'axe est obtenue en donnant aux cibles une forme convenable en forme de cuvette, la courbure a été déterminée empiriquement en révélant les trajectoires des électrons par fluorescence, afin d'assurer une concentration suffisante pour ne pas perdre d'électrons ni créer de surcharges au centre des cibles. Un autre avantage consiste dans le fait que le montage n'a pas besoin d'une très grande précision ce qui permet de supprimer les séparateurs en verre ou mica. Les électrodes multiplicatrices sont de plus en plus serrées pour augmenter le champ d'extraction des électrons secondaires. L'anode est bien protégée par un anneau de garde.

Nous avons été amenés à transformer ce dispositif pour plusieurs raisons :

1° Très grande difficulté de se procurer des toiles en argent-magnésium convenables;

2° L'extraction des électrons secondaires n'est pas bonne;

3° Il est difficile d'activer convenablement une toile.

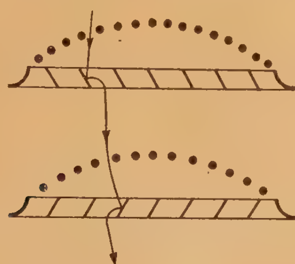


Fig. 2.

Nous avons réalisé un montage d'après le schéma de la figure 2. Les parties multiplicatrices sont formées de lames parallèles et inclinées, une grille lâche et en fils fins permet la concentration et l'extraction des électrons secondaires. L'étude des trajectoires électroniques a été faite par la méthode de la membrane de caoutchouc.

On conserve les avantages du premier schéma : facilité de montage, insensibilité aux perturbations magnétiques, suppression des séparateurs; on a en plus une meilleure extraction et une activation plus facile à réaliser.

Nous avons réalisé ainsi des cellules à 7, 12 et 18 étages.

Nous avons admis, dans le cas idéal, que la cellule non éclairée ne débitait aucun courant, en réalité il n'en est pas ainsi, la cellule à l'obscurité débite toujours un faible courant dit courant résiduel. C'est de lui que dépend, dans un montage correctement exécuté, le plus petit flux lumineux mesurable. Les diverses causes de ce courant ont été très bien mises en évidence par Rajchmann; ce courant a pour origine :

1° La réaction ionique, bien que le vide dans la cellule soit très bon, il existe toujours quelques ions qui ont tendance à remonter vers la photocathode qu'ils bombardent et provoquent ainsi une émission électronique multipliée normalement contribuant ainsi au courant résiduel. Il faut empêcher les ions d'atteindre la photocathode; dans notre montage ils sont très efficacement arrêtés par les multiplicateurs eux-mêmes;

2° L'émission froide, ce sont des électrons qui sont arrachés des différentes électrodes par le champ électrique. Pour l'éviter il faut éliminer toutes aspérités ou pointes, la disposition des supports est telle que les électrons arrachés sur les bords ne puissent pas participer au processus de multiplication. Il faut que deux conducteurs ou deux électrodes portés à des potentiels très différents soient éloignés autant que possible l'un de l'autre. C'est ce que nous avons réalisé au mieux dans la grande cellule à 18 étages;

3° Le courant d'origine ohmique : dans notre montage il ne peut se produire que dans le pied de la cellule, l'expérience nous ayant montré qu'il est d'origine superficielle, nous avons allongé au maximum les lignes de fuite d'une électrode à l'autre comme on le fait pour les isolateurs « haute tension ». Il est bon de remarquer qu'une cellule à multiplicateurs utilise des tensions extraordinairement élevées par rapport aux faibles intensités mises en jeu et il n'est pas raisonnable de diminuer par trop les dimensions de la cellule, ce qui entraîne nécessairement des isolements insuffisants et des gradients de potentiel trop élevés : sources d'émissions parasites. La dernière source de courant résiduel se trouve dans l'émission thermique de la photocathode, elle est liée au travail d'extraction de la couche, c'est-à-dire à sa limite de sensibilité vers l'infrarouge, et les cellules antimoine-césium, qui sont beaucoup moins sensibles vers le rouge que les cellules du type Ag-Cs ^{2}O-Cs ont un courant thermique bien moindre. On peut espérer développer des couches très peu sensibles aux grandes longueurs d'onde du spectre et ayant une émission thermique très faible. Il faut dans ce cas éviter à un haut degré la présence d'oxygène dans la couche.

Ces différentes études et mises au point nous ont conduit aux résultats suivants :

Cellule antimoine-césium. — Source de lumière : lampe à filament de tungstène à 2500° K (température de couleur). Cellules à la température ambiante (20° C).

N° cellule.	Nombre d'étages.	Sensibilité de la photocathode.	Courant résiduel à 120 V.	Multiplication à 120 V.	Lumens donnant un courant égal au courant résiduel.
A 11	7	88 μA : lum	$3,7.10^{-10}$	1215	$3,5.10^{-9}$
B 24	7	103 »	$1,5.10^{-10}$	2080	6.10^{-10}
A 19	12	66 »	128.10^{-10}	100 000	3.10^{-9}
BG 1	17	67 »	30.10^{-10}	850 000	5.10^{-11}
BG 3	19	60 »	$1,3.10^{-6}$	3 700 000	$5,8.10^{-9}$

Quelques considérations sur l'emploi des cellules à multiplicateurs. — L'alimentation en tension des différents étages constitue un problème essentiel car le facteur de multiplication δ varie très vite avec la tension. Si l'on veut des résultats cohérents il faut une tension d'alimentation constante, cette source sera d'autant plus facile à réaliser que la cellule aura moins d'étages. C'est pourquoi il faut se limiter au nombre d'étages multiplicateurs indispensables. La source la plus simple consiste en une batterie de piles. Ces piles alimentent directement les multiplicateurs sans dispositifs potentiométriques, il faut prendre soin d'introduire pour chaque multiplicateur une résistance de protection de 50 kΩ environ, afin d'éviter de graves ennuis en cas de courts-circuits. Si l'on désire une alimentation prise sur le secteur, on peut utiliser le courant redressé et filtré pour alimenter une chaîne de lampes à néon en série avec une forte résistance stabilisatrice. Les tensions d'utilisation peuvent être prises directement aux bornes des lampes, ce dispositif a l'inconvénient de ne pouvoir régler la tension appliquée sur chaque multiplicateur que par sauts de 60 V environ, représentant la chute de tension dans chaque lampe.

Lorsque le flux lumineux à mesurer est suffisamment intense, ou que la cellule à multiplicateurs possède un assez grand nombre d'étages, on peut effectuer la mesure du courant à l'aide d'un galvanomètre. Il est intéressant de calculer, pour un galvanomètre donné, le facteur de multiplication que doit posséder la cellule pour atteindre la sensibilité maximum limitée par l'effet Schottky. Soit I_0 le courant en ampères débité par la photocathode, τ la constante de temps du montage, elle est en général donnée par la période Θ du galvanomètre $\tau = \frac{\Theta}{2\pi}$, e la charge de l'électron en coulombs, on peut montrer que

$$\bar{i}^2 = e\,\frac{I_0}{2\tau},$$

$\bar{i}^2$ étant le carré moyen de la fluctuation du courant I_0.

Le courant minimum I_0 sera le courant thermique de la photocathode à la température ordinaire, son ordre de grandeur peut être pris égal à 10^{-14} ou 10^{-15} A. Prenons $I_0 = 10^{-15}$ A, $\tau = 2$ s,

$$i = 0,6.10^{-17}\ \text{A}.$$

Prenons un galvanomètre dont la sensibilité soit de 10^{-10} A : mm à 1 m. Pour que la fluctuation inévitable de courant donne une fluctuation de zéro du galvanomètre de 1 mm, il faut que le coefficient de multiplication de la cellule soit

$$M = \frac{10^{-10}}{0,610^{-17}} = 1,7.10^{7}.$$

Ce qui est assez difficile d'obtenir sans autres perturbations.

Si l'on refroidit la cellule, la situation est encore plus critique.

On sera donc très souvent conduit à l'amplification par lampes, si l'on veut obtenir de la cellule toute sa sensibilité. Plaçons-nous dans ce cas et soit R la valeur de la résistance de charge, Δf la bande passante de l'amplificateur. La fluctuation trouvée à la sortie du multiplicateur est

$$\bar{I}_f^2 = 2eI_0\,\Delta f M^2.$$

L'effet Johnson dans la résistance est $4kTR\,\Delta f$ et l'on doit avoir

$$2eI_0\,\Delta f M^2 R^2 \geqq 4kTR\,\Delta f.$$

$$M^2 \geqq \frac{2kT}{e}\,\frac{1}{Ri} \qquad \text{avec} \qquad \frac{2kT}{e} = 5.10^{-2}\ \text{V}.$$

Supposons la cellule à la température ordinaire $I_0 = 10^{-15}$ A. Prenons $R = 10^6\,\Omega$, qui ne donne aucune difficulté due au courant grille et à la stabilité de l'amplificateur, on trouve

$$M \geqq 7.10^{3}.$$

On voit que dans ce cas une amplification de 10 000 est largement suffisante. Naturellement l'amplificateur lui-même doit posséder une amplification suffisante pour faire apparaître ces fluctuations aux bornes de l'appareil de sortie.

Si la cellule peut être refroidie, I_0 diminue; il faudra augmenter le nombre des multiplicateurs de la cellule.

Nous avons cherché quelle était la multiplication nécessaire qui permettait d'atteindre la sensibilité ultime de la photocathode, la multiplication permettant de mesurer les photocourants correctement sans y ajouter des perturbations. Plaçons-nous dans ces conditions, soit I_φ le courant photoélectrique de la photocathode. I_Φ le courant à la sortie du multiplicateur, le signal est

$$I_\Phi = I_\varphi \times M$$

le courant d'origine thermique est i; à la sortie il cause un courant résiduel $I = i \times M$.

A la sortie nous aurons des fluctuations données par

$$M[2e(i + I_{\varphi})\Delta f]^{\frac{1}{2}}$$

et le rapport

$$\frac{\text{signal}}{\text{bruit}} = \frac{I_{\varphi} M}{M[2e(i + I_{\varphi})\Delta f]^{\frac{1}{2}}} = \frac{I_{\varphi}}{[2e(i + I_{\varphi})\Delta f]^{\frac{1}{2}}}.$$

M disparaît comme on doit s'y attendre et nous voyons que ce rapport augmente :

1° Si I_{φ} augmente, c'est-à-dire, pour un flux lumineux donné, si la sensibilité de la photocathode augmente;

2° Si i diminue;

3° Si Δf diminue.

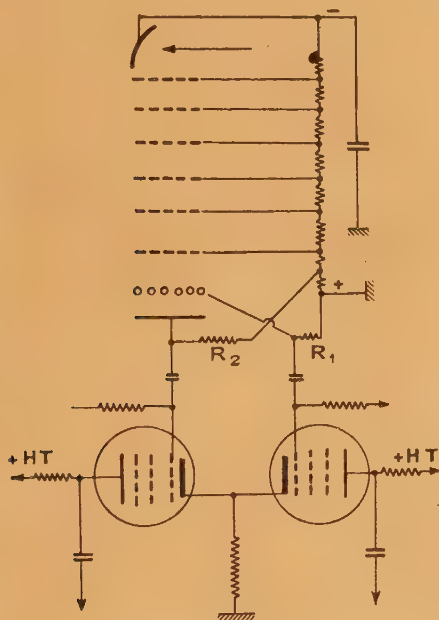


Fig. 3.

Grâce à l'emploi de l'alliage argent-magnésium, on peut réaliser des photocathodes très sensibles (100 μA : lumen et plus). De plus, cet alliage fournit des multiplicateurs qui ne possèdent par eux-mêmes d'émission thermique, ainsi que nous l'avons supposé. i peut être rendu plus petit en refroidissant la couche. On peut aussi le rendre plus petit par des méthodes d'optique électronique.

L'amélioration du rapport $\frac{\text{signal}}{\text{bruit}}$ peut être obtenue très efficacement en diminuant Δf, cette possibilité n'a pas encore été exploitée à fond, car elle conduit à des montages délicats, la fréquence de modulation ne doit pas glisser au cours des mesures par rapport aux fréquences passantes de l'amplificateur.

Lorsque les fréquences à amplifier sont basses, par exemple de l'ordre de 1 p : s, il est très difficile de réaliser un amplificateur stable, dans ces conditions la cellule à multiplicateurs permet de réaliser facilement un amplificateur symétrique beaucoup plus stable (*fig.* 3). L'amplificateur comporte une résistance commune dans le circuit de cathode qui contribue beaucoup à la stabilisation. L'attaque des deux grilles dont les signaux ont même amplitude et sont déphasés de 180° s'obtient facilement en prenant le signal d'une part sur l'anode du multiplicateur, d'autre part, sur la dernière dynode, la multiplication δ de cette plaque étant toujours assez élevée (de l'ordre de 5). Les deux courants, déphasés de 180°, fournissent des tensions de mêmes amplitudes dans les résistances de charges R_1 de l'anode et R_2 de la dynode en prenant

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

Signalons encore un montage très simple et sensible (*fig.* 4). La sortie du multiplicateur se fait sur un condensateur de faible capacité (100 cm) bien isolé et shunté par une lampe néon. Le courant du multiplicateur charge le condensateur qui se décharge dans la lampe lorsque la tension d'allumage est atteinte, on a ainsi dans un temps donné un certain nombre d'éclairs, qu'il suffit de compter pour avoir une mesure du flux lumineux. Ce décompte peut être fait automatiquement en amplifiant sans précautions spéciales le courant débité par la lampe et en actionnant ainsi un petit compteur téléphonique. La sensibilité peut être diminuée en augmentant la capacité du condensateur.

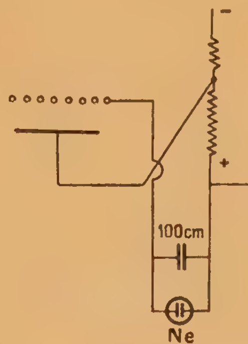


Fig. 4.

Manuscrit reçu le 22 février 1949.

THÉORIE DES RAPPORTS ENTRE GRAVITATION ET ÉLECTROMAGNÉTISME ET SES APPLICATIONS ASTROPHYSIQUES ET GÉOPHYSIQUES [1]

Par Antonio GIÃO.

Sommaire. — En appliquant à l'espace-temps les équations de Codazzi d'une hypersurface, on est conduit à des relations fondamentales entre la gravitation et l'électromagnétisme, aussitôt que l'on interprète le tenseur métrique externe de l'espace-temps comme un tenseur du champ électromagnétique. On montre que cette interprétation est une conséquence des bases de la théorie unitaire de l'auteur, d'après laquelle toutes les propriétés électromagnétiques de l'Univers sont décrites directement ou indirectement par la métrique externe de l'espace-temps.

L'application des expressions générales au cas particulier d'une sphère en rotation sans aimantation permanente donne une importante relation entre le moment magnétique et le moment de rotation et prouve que le magnétisme général des grands corps (astres) est une conséquence fondamentale de leur rotation. On obtient ainsi, pour le champ électromagnétique d'une sphère en rotation, des formules qui expliquent le champ magnétique général de la Terre aussi bien à l'extérieur qu'à l'intérieur du globe. Les mêmes formules peuvent d'ailleurs être appliquées au magnétisme permanent et périodique des étoiles. De plus, on est conduit, par les équations de Codazzi, à une relation entre la gravitation et le champ électrostatique. Cette relation est susceptible d'expliquer le champ électrostatique moyen de la Terre et le maintien de sa charge.

Introduction. — La théorie qui fait l'objet de ce Mémoire est une ramification de la nouvelle théorie unitaire des champs et de la Mécanique ondulatoire relativiste que je m'efforce de développer depuis quelques années et qui a déjà donné lieu à plusieurs publications (*cf.* la liste bibliographique à la fin du Mémoire).

Le présent exposé est divisé en trois Parties. Dans la première Partie, on déduit les équations générales qui expriment les relations fondamentales entre la gravitation et l'électromagnétisme. Dans la deuxième Partie, qui est une préparation aux applications, on montre comment les résultats généraux permettent de traiter le cas particulier très important du champ gravifique et électromagnétique d'une sphère en rotation. Enfin, dans la troisième Partie, les résultats obtenus sont appliqués à des phénomènes astrophysiques ou géophysiques tels que le champ magnétique général de la Terre (tant à l'extérieur qu'à l'intérieur du globe), le champ magnétique général du Soleil, le magnétisme stellaire permanent et périodique, le champ électrostatique moyen de la Terre, etc.

I. — Les rapports entre les champs gravifique et électromagnétique.

1. Équations de Gauss et de Codazzi d'une hypersurface.

— Considérons un espace continu V_N à un nombre quelconque N de dimensions. Cet espace peut évidemment être considéré comme un sous-espace (hypersurface) d'un espace continu ambiant V_{N+1} à $N+1$ dimensions. Pour cette raison, V_N possède, par rapport à V_{N+1}, une *structure externe* ou de *forme* qui sera caractérisée par un certain nombre d'invariants. De plus, si V_N est différentiable, il est possible de définir en chacun de ses points une normale (unitaire) n_μ. L'espace ambiant étant pour le moment un espace abstrait, on peut évidemment lui imposer une structure interne; de sorte que V_N, sous-ensemble de l'ensemble V_{N+1}, aura aussi, en plus de la structure externe, une *structure interne* caractérisée par un certain nombre d'invariants. Il est clair qu'on peut toujours imposer à l'espace abstrait ambiant V_{N+1} une structure interne de Riemann définie par un tenseur fondamental $\Gamma_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, N+1$); l'hypersurface V_N aura donc, dans ce cas, une structure interne et externe complètement déterminée par deux tenseurs symétriques du second ordre : le tenseur métrique interne g_{ik} et le tenseur métrique externe ω_{ik}. Ces deux tenseurs sont donnés par les relations

$$g_{ik} = \Gamma_{\mu\nu} X^{\mu}_{;i} X^{\nu}_{;k}; \qquad \omega_{ik} = X^{\mu}_{;ik} n_\mu, \qquad (1\ a, b)$$

où $X^{\mu}_{;i}$ désigne la dérivée covariante des coordonnées X^μ dans l'espace ambiant par rapport aux coordonnées x^i ($i = 1, \ldots, N$) dans V_N et $X^{\mu}_{;ik}$ la dérivée tensorielle seconde des coordonnées ambiantes par rapport aux x^i.

Le théorème fondamental de la Géométrie différentielle nous apprend qu'étant donnés en chaque

[1] Travail communiqué à la Société de Physique (séance du 29 avril 1949) et exposé au Séminaire de Physique théorique de M. L. de Broglie en avril 1949.

point d'une hypersurface V_N ses tenseurs métriques interne g_{ik} et externe ω_{ik}, l'hypersurface est déterminée dans son espace ambiant à une translation et à une rotation près; plus exactement, l'équation de l'hypersurface dans l'espace ambiant est alors déterminée à $(N+1)(N+2)/2$ paramètres près, qui sont ceux d'une translation et d'une rotation si l'espace ambiant est homogène et isotrope. Mais inversement, si l'on se donne *a priori* deux tenseurs symétriques du second ordre g_{ik} et ω_{ik}, ces deux tenseurs ne peuvent être les tenseurs métriques interne et externe d'une hypersurface d'un espace ambiant (dont la structure interne est définie par le tenseur $\Gamma\mu\nu$) que s'ils satisfont en chaque point de leur domaine d'existence à un système d'équations aux dérivées partielles, qui sont les équations de compatibilité de Gauss

$$R_{ijkl}-(\omega_{ik}\omega_{jl}-\omega_{il}\omega_{jk})=\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}X^{\alpha}_{,i}X^{\beta}_{,j}X^{\gamma}_{,k}X^{\delta}_{,l} \qquad (2)$$

et les équations de compatibilité de Codazzi

$$\omega_{ik,j}-\omega_{ij,k}=\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}n^{\alpha}X^{\beta}_{,i}X^{\gamma}_{,k}X^{\delta}_{,j}, \qquad (3)$$

où R_{ijkl} est le tenseur de Riemann-Christoffel de V_N, $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ le tenseur de Riemann-Christoffel de V_{N+1} pris sur V_N, la virgule désignant une dérivation covariante par rapport aux x^i.

Dans ce Mémoire, nous nous intéressons spécialement aux équations de Codazzi (3). Posons

$$2A^l_k=g^{li}\omega_{lk}. \qquad (4)$$

En tenant compte de la définition de la dérivée covariante des ω_{ik}

$$\omega_{ij,k}=\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x^k}-\omega_{jl}\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}-\omega_{il}\begin{Bmatrix} l \\ jk \end{Bmatrix},$$

on déduit de (3)

$$\frac{\partial\omega_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x^k} -\left[A^h_k\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}\right) -A^h_j\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h}+\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i}\right)\right]=R_{\alpha\beta\gamma\delta}n^{\alpha}X^{\beta}_{,i}X^{\gamma}_{,k}X^{\delta}_{,j},$$

ce qui se réduit à

$$\frac{\partial\omega_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x^k}=A^h_k\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}+\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}\right) -A^h_j\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h}+\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i}\right), \qquad (5)$$

pour un V_N de classe 1, c'est-à-dire pour une hypersurface d'un espace euclidien ou pseudo-euclidien (pour lequel on a identiquement $R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$).

2. Application des équations de Codazzi à l'espace-temps. — L'espace-temps peut évidemment être considéré comme une hypersurface quadridimensionnelle V_4 d'un espace ambiant V_5 à cinq dimensions. Mais notre théorie unitaire montre (comme nous le verrons plus loin) qu'on peut prendre un V_5 pseudo-euclidien, c'est-à-dire que l'espace-temps est un espace de classe 1. Dans ces conditions, les relations (5) s'appliquent à l'espace-temps. Comme l'invariant courbure moyenne (χ) est donné en un point de l'espace-temps par

$$4\chi=g^{ik}\omega_{ik}, \qquad (6)$$

en posant

$$\omega_{ik}=\chi g_{ik}+\varpi_{ik} \qquad (7)$$

on déduit de (4)

$$2A^l_k=\chi\,\delta^l_k+g^{li}\varpi_{ik}. \qquad (8)$$

Considérons un domaine quasi statique de l'espace-temps, c'est-à-dire un domaine en chaque point duquel on peut écrire

$$\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4}=\frac{\partial\omega_{44}}{\partial x^4}=0; \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^4}=\frac{\partial\omega_{ik}}{\partial x^4}=0 \quad \text{pour } i, k=1, 2, 3,$$

x^4 étant la coordonnée temporelle. On peut envisager deux cas importants :

1° les ϖ_{ik} sont du second ordre par rapport aux χg_{ik} pour $i\neq k$. De (8), on déduit alors que les composantes non diagonales de A^i_k sont du second ordre par rapport aux composantes diagonales A^i_i et les équations (5) donnent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\omega_{4l}}{\partial x^j}-\frac{\partial\omega_{4j}}{\partial x^l}=(A^j_j+A^l_l)\left(\frac{\partial g_{4l}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{4j}}{\partial x^l}\right) \quad (j, l=1, 2, 3),\\ &\frac{\partial\omega_{44}}{\partial x^i}-\frac{\partial\omega_{4i}}{\partial x^4}=(A^4_4+A^i_i)\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}-2A^i_i\frac{\partial g_{4i}}{\partial x^4} \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

2° les ϖ_{ik} sont du second ordre par rapport aux χg_{ik} même pour $i=k$. On déduit alors de (8) : $2A^i_k=\chi\delta^i_k$ au second ordre près et les relations (9) se condensent comme suit :

$$\frac{\partial\omega_{4i}}{\partial x^k}-\frac{\partial\omega_{4k}}{\partial x^i}=\chi\left(\frac{\partial g_{4i}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{4k}}{\partial x^i}\right) \quad (i, k=1, 2, 3, 4). \qquad (10)$$

Il se présente maintenant l'important problème de l'interprétation physique des équations (9) ou (10) qui sont une conséquence des équations de Codazzi appliquées à un domaine quasi statique de l'espace-temps. D'après la Relativité générale le tenseur métrique interne g_{ik} est le tenseur des potentiels de la gravitation. Pour interpréter (9), il suffit donc de déterminer la signification physique du tenseur métrique externe ω_{ik}. Or, la gravitation est l'un des champs fondamentaux de l'Univers; d'autre part, le théorème central de la Géométrie différentielle montre que la métrique externe joue un rôle aussi important que la métrique interne. Comme l'espace-temps peut toujours être considéré comme une hypersurface, il est donc évident que le tenseur métrique externe doit avoir une signification physique aussi fondamentale que la gravitation. Cette

conclusion, qui nous semble inévitable, met nettement en évidence, selon nous, la raison principale de l'insuccès de toutes les tentatives qui ont été faites jusqu'à présent pour arriver à une théorie unitaire des champs physiques. En effet, ces tentatives ignorent complètement les propriétés métriques externes de l'espace-temps et ne considèrent que les propriétés internes d'espaces généralisés *ad hoc*. Il existe donc un profond désaccord entre ces théories et le théorème central de la Géométrie différentielle qui exige que l'on accorde la même importance aux deux métriques (interne et externe) et il n'est pas étonnant que les essais de théorie unitaire qui ignorent la métrique externe s'avèrent incapables de géométriser l'électromagnétisme. D'ailleurs, répétons-le, l'espace-temps peut toujours être considéré comme une hypersurface indépendamment de l'existence d'une structure interne; le problème primordial est donc la détermination de l'équation de cette hypersurface dans son espace ambiant, avant toute question d'interprétation physique des propriétés géométriques. Or, d'après la Géométrie différentielle, cette détermination peut être effectuée en imposant à l'espace abstrait ambiant une structure interne de Riemann, ce qu'il est toujours légitime de faire. Dans ces conditions, la considération d'espaces à structure interne non riemannienne en théorie unitaire est inutile et artificielle, car il nous semble évident que seules les propriétés qui interviennent dans la solution du problème primordial peuvent avoir une signification physique.

3. Équations du champ métrique interne et externe. — Pour déterminer la signification physique du tenseur métrique externe ω_{ik} et déduire les équations qui expriment les rapports entre gravitation et électromagnétisme, il est nécessaire de donner un aperçu de la nouvelle théorie unitaire. Je me contenterai ici de brèves indications sur la déduction des équations du champ et je négligerai tout ce qui concerne la synthèse des équations du champ et de la Mécanique ondulatoire relativiste ainsi que la quantification et, par conséquent, la déduction de l'existence et des propriétés des particules fondamentales (2).

Définissons tout d'abord ce que nous entendons par *fonction-contenu* d'une hypersurface V_N. Toute fonction bornée φ des points de V_N est dite fonction-contenu de V_N si ses valeurs en un point ne sont pas entièrement déterminées par les g_{ik}, ω_{ik} et leurs dérivées au même point. Une fonction-contenu exprime donc une propriété qui n'est pas purement géométrique. Néanmoins, une fonction-contenu φ peut avoir une expression de la forme

$$\varphi = \varphi\left(g_{ik}, \omega_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}, \ldots, \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^l}, \ldots, b_1, \ldots, b_p\right)$$

à la condition que les paramètres $b_1, \ldots, b_p$ ne soient pas complètement déterminés par les valeurs des g_{ik}, ω_{ik} et leurs dérivées en un point. Ceci étant dit, considérons une hypersurface V_N sans contenus (c'est-à-dire sans fonctions-contenus). Cette hypersurface vide peut être appelée un être mathématico-géométrique incomplet. Si, par contre, V_N possède un ensemble de fonctions-contenus, on dira que l'ensemble formé par V_N et ses contenus est un être mathématico-géométrique complet.

Les êtres mathématiques complets, ainsi définis, sont en général arbitraires, en ce sens qu'ils ne sont pas complètement *auto-déterminés* par une relation intrinsèque entre le contenant V_N et ses contenus. Il n'existe pas, en général, une relation permettant de déterminer l'hypersurface V_N dans son espace ambiant *quand on ne connaît que* les fonctions-contenus et permettant aussi de déterminer inversement les fonctions-contenus *quand on ne connaît que* les propriétés de la structure interne et externe du contenant V_N. Pour donner une analogie utile, considérons un vase susceptible de contenir plusieurs liquides. Le fait de connaître la capacité, la forme et les autres propriétés purement géométriques du vase ne suffit évidemment pas à déterminer la nature et la structure du liquide qu'il contient à un moment donné; inversement, en connaissant seulement la nature et la structure du liquide qui se trouve dans le vase on ne peut rien dire sur les propriétés géométriques de celui-ci. L'ensemble vase + liquide forme donc ce qu'on peut appeler un être arbitraire, c'est-à-dire non complètement auto-déterminé. Poursuivons notre analogie en considérant un vase idéal doué des propriétés suivantes tout à fait spéciales :

1° il suffit de connaître les propriétés purement géométriques du vase pour déterminer, par cela même, la nature et la structure du *seul* liquide qu'il peut contenir;

2° inversement, il suffit de connaître la nature et la structure de ce liquide pour pouvoir déterminer toutes les propriétés géométriques du *seul* vase où il peut être contenu;

3° les deux premières conditions sont nécessaires et suffisantes pour déterminer complètement l'ensemble vase + liquide. Dans ce cas, il existe une relation intrinsèque absolue entre contenant et contenus et l'ensemble vase + liquide peut être appelé un être *non arbitraire*.

Il est facile de passer de cette analogie à la définition fondamentale d'*être mathématique non arbitraire* sur laquelle repose toute notre théorie unitaire. Nous dirons que l'ensemble formé par une hypersurface V_N et ses fonctions-contenus est un être mathématique non arbitraire lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes : 1° les propriétés intrinsèques de la métrique interne et externe du contenant V_N sont entièrement déterminées quand on connaît les

(2) Sur ces questions, consulter les mémoires de l'auteur cités dans la Bibliographie [4].

fonctions-contenus; 2° inversement, les fonctions-contenus sont entièrement déterminées quand on connaît les propriétés intrinsèques de la métrique interne et externe du contenant; 3° les deux premières conditions sont nécessaires et suffisantes pour déterminer l'ensemble contenant + contenus. Un être mathématique satisfaisant à cette définition mérite vraiment le nom d'être mathématique non arbitraire, puisqu'il est complètement auto-déterminé par une relation intrinsèque et bilatérale entre contenant et contenus.

Cette définition est susceptible d'être exprimée rigoureusement par un système d'équations aux dérivées partielles. En effet, une propriété intrinsèque de la métrique interne, par exemple, est une fonction du tenseur métrique interne et de ses dérivées qui jouit des mêmes propriétés générales que ce tenseur, tout en ne se confondant pas identiquement avec lui et qui satisfait en outre à la propriété la moins restrictive qui est nécessaire et suffisante pour déterminer sans ambiguïté sa forme analytique. Un théorème de Cartan nous apprend alors que les propriétés intrinsèques de la métrique interne ont nécessairement la forme

$$\frac{1}{K_g}\left[R_{ik}-\frac{1}{2}(R+\lambda_g)g_{ik}\right], \tag{11}$$

λ_g et K_g étant des constantes absolues, R_{ik} le tenseur de Ricci formé avec les g_{ik} et R l'invariant $R = g^{ik} R_{ik}$. Le même théorème montre donc que les propriétés intrinsèques de la métrique externe ont nécessairement la forme

$$\frac{1}{K_\omega}\left[S_{ik}-\frac{1}{2}(S+\lambda_\omega)\omega_{ik}\right], \tag{12}$$

λ_ω et K_ω étant des constantes absolues, S_{ik} le tenseur obtenu à partir de l'expression de R_{ik} en remplaçant les g_{ik} par les ω_{ik}, S l'invariant $S = \omega^{ik} S_{ik}$ (avec $\omega^{il}\omega_{lk} = \delta^i_k$). D'après la définition d'être mathématique non arbitraire, il faut égaler (11) et (12) à des fonctions-contenus tensorielles que nous désignerons respectivement par T_{ik} et U_{ik}. On aura donc le système

$$\left.\begin{aligned} R_{ik}-\frac{1}{2}(R+\lambda_g)g_{ik} &= K_g T_{ik},\\ S_{ik}-\frac{1}{2}(S+\lambda_\omega)\omega_{ik} &= K_\omega U_{ik}.\end{aligned}\right\} \tag{13 a, b}$$

La troisième condition de la définition exige d'ailleurs que les g_{ik} et ω_{ik} qui satisfont à ce système soient les tenseurs métriques interne et externe d'une hypersurface, de sorte qu'ils doivent satisfaire aux équations de compatibilité de Gauss (2) et de Codazzi (3). L'ensemble des équations (13 *a*), (13 *b*), (2) et (3), indépendantes *a priori* de toute théorie physique proprement dite, forme le système des équations du champ métrique dans notre théorie unitaire et exprime la définition d'être mathématique non arbitraire. Cette définition est constructive. En effet, l'analyse du système (13 *a*, *b*) + (2) + (3) permet de démontrer trois théorèmes fondamentaux qu'on peut énoncer comme suit :

I. *Le contenant ou hypersurface de tout être mathématique non arbitraire est un espace à quatre dimensions et de classe* 1.

II. *La métrique interne et externe du contenant de tout être mathématique non arbitraire est hyperbolique normale (trois dimensions spatiales réelles et une dimension imaginaire ou temporelle).*

III. *Il existe un et un seul être mathématique non arbitraire dans l'ensemble des espaces continus à un nombre quelconque de dimensions.*

En présence de ces résultats purement analytiques, dont quelques-uns sont les propriétés caractéristiques évidentes de l'espace-temps, la théorie unitaire introduit alors un *principe cosmologique* qui confère une signification physique essentielle à l'être mathématique non arbitraire. Ce principe affirme qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre les propriétés de l'être mathématique non arbitraire et les propriétés physiques de l'Univers. Utilisant un langage moins précis on peut dire que le principe cosmologique affirme que tout être mathématique non arbitraire possède l'existence physique, ou bien que l'existence physique est identique à l'existence mathématique non arbitraire, ou encore que l'existence physique n'est que l'existence mathématique marquée en quelque sorte par le « sceau » intrinsèque du non arbitraire.

Par suite de l'unicité de l'être mathématique non arbitraire, le principe cosmologique peut encore être énoncé en disant que l'Univers physique est le seul être mathématique non arbitraire qui existe dans l'ensemble des espaces continus à un nombre quelconque de dimensions. Si l'on admet le principe cosmologique, alors, indépendamment même des exigences du théorème central de la Géométrie différentielle, il est évident que le tenseur métrique externe doit avoir une signification physique et que cette signification doit être aussi importante que la gravitation, étant donné le « parallélisme » des équations (13 *a*) et (13 *b*) pour les champs métriques interne et externe.

4. **Le tenseur métrique externe et le champ électromagnétique.** — Pour déterminer la signification physique de ω_{ik}, remarquons que, d'après les propriétés générales des premiers membres des équations (13 *a*, *b*), les tenseurs T_{ik} et U_{ik} satisfont aux relations de conservation

$$(T^{ij}_{,j})_g = 0; \qquad (U^{ij}_{,j})_\omega = 0, \tag{14 a, b}$$

les indices g et ω indiquant que la dérivation covariante est effectuée respectivement par rapport

aux g_{ik} et aux ω_{ik}. Par suite de ces relations de conservation et en tenant compte du fait que les traces des tenseurs T_{ik} et U_{ik} ne s'annulent pas identiquement, il est possible de considérer ces tenseurs comme les tenseurs de densité d'énergie-impulsion de fluides élémentaires répandus dans l'espace-temps. Considérons alors une particule, un globule du fluide dont la densité d'énergie-impulsion est T_{ik} et un globule du fluide dont la densité d'énergie-impulsion est U_{ik}. Il est évident que ces tenseurs peuvent être décomposés en une partie cinétique correspondant au mouvement du « centre de gravité » des globules et une partie non cinétique (Θ^{ik} et Θ^{ik}_{ω}). Soient

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k; \qquad d\Omega^2 = \omega_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{15 a, b}$$

les formes quadratiques différentielles associées respectivement à la métrique interne et à la métrique externe. Nous aurons donc

$$\left.\begin{aligned} T^{ik} &= \mu\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} + \Theta^{ik};\\ U^{ik} &= \mu_{\omega}\,\frac{dx^i}{d\Omega}\,\frac{dx^k}{d\Omega} + \Theta^{ik}_{\omega}, \end{aligned}\right\} \tag{16 a, b}$$

μ et μ_{ω} étant des scalaires. Si le mouvement du globule de T_{ik} est indépendant des actions qui proviennent du tenseur Θ^{ik}, c'est-à-dire s'il s'agit d'un « mouvement libre », alors les relations de conservation (14 *a*) donnent facilement, en y introduisant (16 *a*), les équations du mouvement en question

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix} \frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{17}$$

qui sont donc les équations des géodésiques de la métrique interne. De même, si le mouvement du globule de U_{ik} est indépendant des actions qui proviennent du tenseur Θ^{ik}_{ω}, c'est-à-dire s'il s'agit d'un « mouvement libre » de ce globule, alors les équations de conservation (14 *b*) donnent facilement, en y introduisant (16 *b*), les équations du mouvement

$$\frac{d^2x^i}{d\Omega^2} + \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}_{\Omega} \frac{dx^j}{d\Omega}\,\frac{dx^k}{d\Omega} = 0, \tag{18}$$

où $\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}_{\Omega}$ est le symbole de Christoffel de seconde espèce formé avec les ω_{ik}, c'est-à-dire

$$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}_{\Omega} = \frac{1}{2}\,\omega^{ih}\left(\frac{\partial\omega_{kh}}{\partial x^j} + \frac{\partial\omega_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial\omega_{jk}}{\partial x^h}\right). \tag{19}$$

Les équations (18) sont les équations des géodésiques de la métrique externe.

Comparons maintenant les équations (18) aux équations classiques de Laplace-Lorentz pour le mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique. On voit facilement que les équations de Laplace-Lorentz sont une conséquence des équations (18) si le champ magnétique H_i et électrique E_i est relié aux ω_{ik} par les relations

$$\left.\begin{aligned} H_i &= \frac{1}{\chi_0\sqrt{-1}}\,\frac{(m_0)_e c^2}{e}\left(\frac{\partial\omega_{4l}}{\partial x^j} - \frac{\partial\omega_{4j}}{\partial x^l} - \frac{\partial\omega_{jl}}{\partial x^4}\right),\\ E_i &= -\frac{1}{2\chi_0}\,\frac{(m_0)_e c^2}{e}\left(\frac{\partial\omega_{44}}{\partial x^i} - 2\,\frac{\partial\omega_{4i}}{\partial x^4}\right), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$(m_0)_e$ et e étant la masse propre et la charge électrique de l'électron et χ_0 une constante positive (courbure moyenne de l'espace-temps isotrope et homogène le plus proche de l'espace-temps véritable). Comme il n'est pas possible de comparer les équations de Laplace-Lorentz aux équations (17), car il est bien connu que celles-ci sont les équations du mouvement d'une particule matérielle dans un champ de gravitation pur, on voit que le champ électromagnétique doit être effectivement relié aux ω_{ik} par les relations (20). Le tenseur métrique externe ω_{ik} est donc le tenseur des potentiels du champ électromagnétique (électromoteur), ce qui montre l'importance fondamentale de ce tenseur, d'accord avec les exigences du théorème central de la Géométrie différentielle.

5. **Relations entre le champ de gravitation et le champ électromagnétique dans un domaine quasi statique de l'espace-temps.** — En associant les équations (20) aux équations (9), on obtient immédiatement les relations cherchées qui s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} H_i &= \frac{1}{\chi_0\sqrt{-1}}\,\frac{(m_0)_e c^2}{e}\,(A^j_j + A^l_l)\left(\frac{\partial g_{4l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{4j}}{\partial x^l}\right),\\ E_i &= -\frac{1}{2\chi_0}\,\frac{(m_0)_e c^2}{e}\\ &\quad\times\left[(A^4_4 + A^i_i)\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i} - 2A^i_i\frac{\partial g_{4i}}{\partial x^4} - \frac{\partial\omega_{4i}}{\partial x^4}\right], \end{aligned}\right\} \tag{21, a; b}$$

i, j, l étant une permutation circulaire de 1, 2, 3. Dans le cas examiné plus haut (§ 2) où le tenseur ϖ_{ik}, défini par (7) est une petite quantité par rapport à χg_{ik} même pour $i = k$, il faut appliquer les relations (10); les (21) prennent alors la forme

$$\left.\begin{aligned} H_i &= \frac{\chi}{\chi_0\sqrt{-1}}\,\frac{(m_0)_e c^2}{e}\left(\frac{\partial g_{4l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{4j}}{\partial x^l}\right),\\ E_i &= -\frac{\chi}{2\chi_0}\,\frac{(m_0)_e c^2}{e}\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{4i}}{\partial x^4} - \frac{1}{\chi}\,\frac{\partial\omega_{4i}}{\partial x^4}\right). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Ce sont les relations (21) ou (22) que nous allons utiliser pour analyser les rapports entre le champ de gravitation et le champ électromagnétique.

II. — Le champ gravifique et électromagnétique d'une sphère en rotation.

6. **Champ gravifique.** — Considérons une sphère en rotation de rayon a. Désignons par $\vec{\Omega}_{\text{rot}}$ la vitesse angulaire de rotation des particules (la valeur absolue

de $\vec{\Omega}_{\text{rot}}$ et la densité μ de la matière ne sont pas nécessairement uniformes dans la masse). Soit p la pression, M_{rot} le moment de rotation (constant) de la sphère et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de l'axe de rotation. En l'absence d'aimantation permanente de la matière et d'aimantation induite par des courants de conduction, les composantes T_{4i} ($i = 1, 2, 3$) du tenseur de densité d'énergie-impulsion matériel sont de nature cinématique et ont la forme

$$T_{4i} = -\frac{8\pi}{c^3\sqrt{-1}}\frac{K}{K_g}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}}(u_j x_l - u_l x_j), \quad (23)$$

K étant la constante newtonienne de la gravitation et x_j les coordonnées rectangulaires sphérocentriques. On peut décomposer les g_{4i} ($i = 1, 2, 3$) en deux parties : l'une statique $(g_{4i})_{\text{st}}$ et l'autre non statique $g^{\star}_{4i}$

$$g_{4i} = (g_{4i})_{\text{st}} + g^{\star}_{4i}. \quad (24)$$

Des équations (13 a), convenablement linéarisées suivant un procédé classique, on déduit

$$\Delta_3 (g_{4i})_{\text{st}} = 2K_g\left(T_{4i} - \frac{1}{2}T g_{4i}\right). \quad (25)$$

Δ_3 étant le laplacien tridimensionnel spatial. Grâce à (23), on obtient donc la solution

$$(g_{4i})_{\text{st}}(P) = \frac{4K}{c^3\sqrt{-1}}\int_{D}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\text{rot}} \times \frac{1}{r(P, Q)}(u_j x_l - u_l x_j)\,dv_Q, \quad (26)$$

P et Q étant deux points à la distance spatiale r (P, Q) et D le domaine spatial occupé par la sphère. Par un développement classique de $\frac{1}{r(P, Q)}$, on déduit facilement de (26) l'expression suivante pour les $(g_{4i})_{\text{st}}$ à l'extérieur de la sphère en un point P suffisamment éloigné de la surface

$$(g_{4i})^{(\text{ext})}_{\text{st}} = \frac{2K}{c^3\sqrt{-1}}\gamma M_{\text{rot}}\frac{1}{r^3}(u_j x_l - u_l x_j), \quad (27)$$

γ étant un coefficient numérique satisfaisant à $0 < \gamma \leq 1$ et égal à l'unité quand $\mu + \frac{p}{c_2}$ et Ω_{rot} sont uniformes ou ont une distribution à symétrie sphérique dans la sphère. La même solution (26) prend la forme suivante pour les points intérieurs :

$$(g_{4i})^{(\text{int})}_{\text{st}} = \frac{15K}{c^3 a^3\sqrt{-1}}\left(\frac{b}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right)M_{\text{rot}}(u_j x_l - u_l x_j), \quad (28)$$

b étant une fonction numérique des points de la sphère qu'il est inutile de déterminer, mais qui se réduit à l'unité quand la densité et la vitesse de rotation sont uniformes. En ce qui concerne la partie non statique des g_{4i} ($i = 1, 2, 3$), nous poserons simplement pour la sphère

$$g^{\star}_{4i} = h(r, x^4)\frac{\partial r}{\partial x^i}, \quad (29)$$

h étant une fonction qui sera déterminée plus loin.

7. **Champ magnétique extérieur.** — Pour déterminer ce champ, il faut naturellement introduire les g_{4i}, donnés par (27) et (29), dans les équations générales (21 a). On peut évidemment décomposer comme suit le coefficient $A^l_j + A^j_l$ de (21 a)

$$A^l_j + A^j_l = \xi + \xi', \quad (30)$$

ξ étant quasi statique et ξ' la partie non statique qui correspond aux $g^{\star}_{4i}$; on obtient donc sans difficulté en notation vectorielle le champ magnétique extérieur de la sphère en rotation

$$\vec{H}_{\text{ext}} = 2\frac{\xi}{\chi_0}\frac{(m_0)_e}{ec}K\gamma M_{\text{rot}}\,\text{rot}\left[\vec{u} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right], \quad (31)$$

∇ étant l'opérateur gradient spatial. D'après l'électromagnétisme classique (31) représente le champ magnétique extérieur d'une sphère uniformément aimantée dont le moment magnétique M_{magn} est donné par

$$M_{\text{magn}} = 2\frac{\xi}{\chi_0}\frac{(m_0)_e}{ec}K\gamma M_{\text{rot}}. \quad (32)$$

Nous retrouvons ainsi, comme conséquence des équations de Codazzi associées aux relations (20 a), l'importante relation entre le moment de rotation et le moment magnétique d'une sphère (même non électrisée) que nous avions déduite précédemment des seules équations du champ (13) sans recourir aux équations de Codazzi [5]. Le fait que (32) peut être déduite des équations de Codazzi est à notre avis très important, car il montre le caractère fondamental de la création du magnétisme par la rotation et constitue, par ailleurs, une nouvelle vérification des bases de notre théorie unitaire, d'après laquelle tout l'électromagnétisme est représenté par les propriétés géométriques externes de l'espace-temps.

8. **Champ magnétique intérieur.** — En introduisant les expressions (28) des g_{4i} intérieurs dans les équations (21 a), tout en tenant compte de (29) et de (30), on obtient comme précédemment par une opération de moyenne temporelle le champ magnétique intérieur. En notation vectorielle on aura

$$\vec{H}_{\text{int}} = -\frac{\xi}{\chi_0}\frac{(m_0)_e}{ec}K\frac{M_{\text{rot}}}{a^3}\,\text{rot}\left[\left(5b - 3\frac{r^2}{a^2}\right)\vec{u} \times \vec{r}\right]. \quad (33)$$

9. **Champ électrostatique.** — La force de gravitation G_i par unité de masse est reliée à g_{44} par la formule bien connue

$$G_i = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}.$$

De la relation (21 b), on déduit donc en tenant compte de (29)

$$E_i = \frac{1}{\chi_0}\frac{(m_0)_e}{e}\left[\left(A_4^4 + A_i^i\right) G_i + A_i^i c^2 \frac{\partial h}{\partial x^4}\frac{\partial r}{\partial x^i} + \frac{c^2}{2}\frac{\partial \omega_{4i}}{\partial x^4}\right] \quad (34)$$

Par suite de (8), on a $A_4^4 = A^i$, de sorte que

$$A_4^4 + A_i^i = \xi + \xi',$$

d'après (30), ξ et ξ' ayant ici les mêmes valeurs que dans (30). La relation (34) donne alors par une opération de moyenne temporelle le champ électrostatique $\vec{E}_{st}$,

$$\vec{E}_{st} = \frac{\xi}{\chi_0}\frac{(m_0)_e}{e}\left\{\vec{G} + \frac{c^2}{2\xi}\overline{\left[\xi'\frac{\partial h}{\partial x^4}\right]}\frac{\vec{r}}{r}\right\}, \quad (35)$$

la barre désignant la moyenne temporelle. Pour obtenir la valeur moyenne de $\xi'\frac{\partial h}{\partial x^4}$ on utilise les équations du champ métrique (13 a). Dans le cas actuel, les composantes T_{4i} ($i = 1, 2, 3$) du tenseur de densité d'énergie-impulsion correspondent à la partie statique des g_{4i} et la partie non statique $g_{4i}^{\star}$ satisfait donc à l'équation linéarisée

$$\Box g_{4i}^{\star} = -\frac{8\pi K}{c^2} T g_{4i}^{\star},$$

du champ métrique interne. Par suite de (29) et en posant

$$h(r, x^4) = f(x^4)\varphi(r)$$

on obtient pour un point extérieur la solution

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} g_{4i}^{\star} = \varphi(r)\frac{\partial r}{\partial x^i}\sin(c\sigma t)$$

σ étant une constante pour une sphère donnée portée à un certain potentiel électrique. Le champ électrostatique sera donc

$$\vec{E}_{st} = \frac{\xi}{\chi_0}\frac{(m_0)_e}{e}\left\{\vec{G} + \frac{c^2\sigma}{2\xi}\overline{[\xi'\varphi\cos(c\sigma t)]}\frac{\vec{r}}{r}\right\}.$$

La variation spatiale de $\varphi\xi'$ est déterminée par l'équation $\operatorname{div}\vec{E}_{st} = 0$ du champ électrostatique à l'extérieur des charges. Comme on a $\operatorname{div}\vec{G} = 0$ à l'extérieur de la sphère matérielle, on obtient la condition $\operatorname{div}\xi'\varphi\frac{\vec{r}}{r} = 0$, ce qui conduit à

$$\frac{\partial\varphi\xi'}{\partial r} - \frac{2}{r}\varphi\xi' = 0,$$

dont la solution s'écrit $\varphi\xi' = \frac{a(t)}{r^2}$. La fonction $a(t)$ est évidemment une fonction périodique de même période que $g_{4i}^{\star}$. En conséquence, un développement de Fourier donne $\overline{[a(t)\cos(c\sigma t)]} = \alpha$ avec

$$2\pi\alpha = c\sigma\int_0^{\frac{2\pi}{c\sigma}} a(t)\cos(c\sigma t)\,dt.$$

En posant $c^2\sigma\alpha = 2\eta$ et en remarquant que pour une sphère de masse M on a $\vec{G} = -KM\frac{\vec{r}}{r^3}$, on arrive finalement à

$$\vec{E}_{st} = \frac{\xi}{\chi_0}\frac{(m_0)_e}{e}\left(1 - \frac{\eta}{KM\xi}\right)\vec{G}. \quad (36)$$

Telle est la relation cherchée entre le champ de gravitation et le champ électrostatique. Quand la gravitation de la sphère est négligeable (comme au laboratoire), cette relation se réduit à

$$\vec{E}_{st} = \frac{(m_0)_e}{e}\frac{\eta}{\chi_0}\frac{\vec{r}}{r^3},$$

qui n'est autre que le champ de Coulomb habituel d'une sphère portant la charge électrique

$$Q = \frac{(m_0)_e}{e}\frac{1}{\chi_0}\eta.$$

En nous rappelant la nature de η, on voit que le champ de Coulomb est une conséquence directe des vibrations très rapides éprouvées par les composantes $g_{4i}^{\star}$ (pour $i = 1, 2, 3$) du tenseur métrique de tout corps électrisé. Ce résultat peut être considéré comme l'équivalent géométrique d'un résultat de la théorie de la lumière de M. L. de Broglie selon lequel le champ de Coulomb correspond à l'échange (virtuel) de photons par ondes longitudinales.

10. **Le coefficient ξ des formules (32) et (36).** — L'orientation du domaine d'espace-temps considéré n'a pas été spécifiée jusqu'à présent. Il y a évidemment deux orientations possibles, l'une positive et l'autre négative, de sorte que, d'après (1 b) et (6), le coefficient ξ (qui est une courbure moyenne de l'espace-temps) est nécessairement de la forme

$$\xi = \pm\lambda^2\chi_0, \quad (37)$$

ce qui donne, par exemple, à la relation (32) la forme

$$M_{magn} = \pm 2\lambda^2\frac{(m_0)_e}{ec}K\gamma M_{rot}. \quad (38)$$

Ce résultat a été précédemment déduit par l'auteur à l'aide des équations du champ (13) en montrant [5] qu'à un même tenseur de densité d'énergie-impulsion T_{ik} correspondent, dans des cas étendus, deux tenseurs de densité d'énergie-impulsion électrique U_{ik} égaux (en valeur absolue) et de signes contraires. On voit donc que deux sphères en rotation de même rayon et avec la même distribution de densité et de vitesse angulaire (donc avec le

même M_{rot}) peuvent avoir des champs et des moments magnétiques égaux (en valeur absolue) et opposés.

Rappelons ici en passant que la formule (38) peut être appliquée aussi en microphysique. Nous avons montré en effet [4, 5] qu'on peut l'appliquer à la théorie du moment magnétique du neutron et du proton. D'après (38) :

1° le neutron possède un moment magnétique parce qu'il a un moment de rotation (spin);

2° le proton et le neutron, bien qu'ayant le même spin $\left(\frac{h}{4\pi}\right)$ et presque la même masse propre, peuvent cependant avoir, le premier un moment magnétique parallèle au spin [solution + dans la formule (38)], le second un moment magnétique antiparallèle au spin (solution —);

3° la différence des valeurs absolues des moments magnétiques du proton et du neutron provient des valeurs différentes de λ pour ces deux particules.

III. — Quelques applications astrophysiques et géophysiques.

11. Le champ magnétique général des astres considéré comme une conséquence fondamentale de leur rotation. — En avril 1946, H. W. Babcock [1] a commencé au Mount Wilson l'étude de l'effet Zeeman des raies métalliques dans les spectres des étoiles du type spectral B_8 à F_0. Quelques-unes de ces étoiles ont des raies métalliques d'absorption d'intensité constante tandis que d'autres ont des raies d'intensité variable (périodique). L'étoile 78 Virginis est l'une des premières étoiles à raies métalliques d'absorption d'intensité constante étudiées par Babcock. L'effet Zeeman permet de déterminer, pour cette étoile, un champ magnétique polaire de 1500 gauss, c'est-à-dire environ 3000 fois plus intense que le champ terrestre. Comme la statistique stellaire permet de déterminer avec suffisamment de précision la masse et la rotation d'étoiles types de chaque type spectral le long de la séquence principale de Russell-Hertzsprung, Babcock eut l'idée de comparer les moments magnétiques et les moments de rotation de la Terre, du Soleil et de l'étoile 78 Vir et trouva que le rapport $\frac{M_{magn}}{M_{rot}}$ a la même valeur pour les trois corps célestes considérés. Un peu plus tard, Blackett [2] a montré empiriquement que ce rapport a la valeur $\beta\frac{\sqrt{K}}{2c}$, où β désigne un coefficient numérique voisin de l'unité. Ce résultat est évidemment un cas particulier de notre résultat général (38) où l'on a

$$\lambda^2 = \frac{\xi}{\chi_0} = \frac{\beta}{4\gamma}\,\frac{e}{(m_0)_e\sqrt{K}}. \qquad (39)$$

Le rapport $\frac{\xi}{\chi_0}$ est donc, à $\frac{\beta}{4\gamma}$ près, la charge de l'électron en unités gravitationnelles.

Si l'on pense qu'il est impossible d'admettre l'existence d'un noyau aimanté à l'intérieur de la Terre ou des étoiles par suite des très hautes températures qui y règnent, incompatibles avec une aimantation permanente de la matière; si l'on pense, par ailleurs, qu'il n'existe pas, dans la Terre ou dans l'atmosphère, des charges et des courants suffisants pour expliquer par induction le magnétisme général de la Terre, alors il est presque forcé d'admettre que la cause réelle du magnétisme de la Terre et des astres est celle qui est révélée par la théorie exposée dans ce Mémoire, c'est-à-dire que le magnétisme terrestre et des astres est une conséquence fondamentale de leur rotation.

On sait que l'axe du champ magnétique général de la Terre et du Soleil ne coïncide pas exactement avec l'axe de rotation. Les deux axes forment un angle de 11°,5 pour la Terre et d'environ 5° pour le Soleil. Ce fait semble, à première vue, contraire à la théorie exposée ici. En réalité, si au lieu de passer des équations de Codazzi (5) aux équations (9) en ne conservant que les termes qui dépendent des composantes diagonales du tenseur A^i_k, on conservait aussi les termes de (5) qui dépendent des composantes non diagonales de ce tenseur, alors on verrait que quelques-uns de ces termes correspondent précisément à l'angle des axes magnétiques et de rotation (³).

12. Champ magnétique périodique de certaines étoiles. — Babcock a montré [1] que les étoiles dont les spectres présentent des raies métalliques d'absorption d'intensité périodique ont des champs magnétiques périodiques. L'une des plus intéressantes parmi ces étoiles est BD-18° 3789 dont la luminosité totale est pratiquement constante (ses variations étant inférieures à 1/100ᵉ de magnitude), mais où l'effet Zeeman met en évidence un champ magnétique périodique dont la période (égale à la période de l'intensité des raies) est de 9,3 jours. Au cours d'une période le champ magnétique polaire varie de + 6500 gauss environ à — 6000 gauss, en dépit de la constance presque rigoureuse du moment de rotation de l'étoile exigée par la mécanique. Cet important phénomène peut être expliqué par la théorie. J'ai montré en effet récemment [6], en utilisant les équations fondamentales de la théorie unitaire, que le coefficient λ de la formule (38) doit être, en général, une fonction périodique du temps pour une masse en rotation sans aimantation permanente. En introduisant une telle fonction périodique dans cette formule, tout en faisant appel à la possibilité de la réalisation

(³) Nous nous sommes occupés en détail de cette question dans *Comptes Rendus*, 228, 1949, 1203.

alternée des solutions $\pm$ au cours de périodes successives, on obtient facilement la loi suivante pour la variation de M_{magn} :

$$M_{\text{magn}} = (-1)^N (\lambda_0 + \Lambda \sin \sigma t)^2 \frac{2(m_0)_e}{ec} K \gamma M_{\text{rot}} \quad \left(\begin{array}{l} N = \text{nombre d'instants où } \lambda = 0, \\ \text{comptés depuis } t = 0. \end{array} \right) \qquad (40)$$

Cette fonction explique les observations de Babcock.

13. **Variation du champ magnétique à l'intérieur de la Terre.** — Les formules (31) et (33) donnent le champ magnétique général de la Terre à l'extérieur et à l'intérieur du globe (abstraction faite de l'angle des axes magnétique et de rotation, *cf.* plus haut). De ces formules, on déduit facilement [5], en les écrivant en coordonnées sphériques, l'expression suivante de la condition de continuité des composantes tangentielles du champ sur la surface de la Terre

$$\left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)_0 - \frac{2}{a} \sin\varphi \cos\varphi \frac{\partial b_0}{\partial \varphi} = \frac{2}{5a}(6 - 5b_0 - \gamma), \qquad (41)$$

φ désignant la latitude et l'indice zéro les valeurs sur la surface.

a. Variation de la composante horizontale. — Soit d la profondeur d'un point à l'intérieur du globe, c'est-à-dire $d = a - r$. Quand d est de l'ordre de quelques kilomètres, les termes en $\frac{d^2}{a^2}$ de (33) sont tout à fait négligeables par rapport aux termes en $\frac{d}{a}$ puisque $a = 6367$ km pour la Terre. De cette formule (33), écrite en coordonnées sphériques, on déduit donc très facilement [5] la relation

$$\overline{H}_d - \overline{H}_0 = \frac{1}{\gamma}\left[5(b_0 - b_d) - 12\frac{d}{a}\right]\overline{H}_0, \qquad (42)$$

où $\overline{H}_d$ est la composante horizontale de $\vec{H}_{\text{int}}$ pour $r = a - d$. Mais (41) donne

$$b_0 - b_d = \frac{2}{5}(6 - 5b_0 - \gamma)\frac{d}{a}, \qquad (43)$$

en négligeant la petite influence de $\frac{\partial b_0}{\partial \varphi}$. La relation (42) prend donc la forme

$$\overline{H}_d - \overline{H}_0 = -2\left(1 + 5\frac{b_0}{\gamma}\right)\overline{H}_0 \frac{d}{a}, \qquad (44)$$

ce qui prouve que *la composante horizontale diminue avec la profondeur*. Ce résultat est en accord avec les expériences de Hales et Gough [7] dans une mine du Transvaal à $d = 1463$ m et avec les expériences de Runcorn [8] dans une mine du Lancashire à $d = 1300$ m. Les résultats du Transvaal donnent $\frac{b_0}{\gamma} \cong \frac{2}{5}$, tandis que ceux du Lancashire correspondent à $b_0 \cong \gamma$.

b. Variation de la composante verticale. — Soit V_d la composante verticale de $\vec{H}_{\text{int}}$ pour $r = a - d$ et V_0 la valeur de V_d pour $d = 0$ sur la même verticale. De (33), écrite en coordonnées sphériques et de (43) on déduit facilement

$$V_d - V_0 = 2\left(1 + \frac{\gamma}{5b_0 - 3}\right)V_0 \frac{d}{a}. \qquad (45)$$

On voit donc que, contrairement à la composante horizontale, *la composante verticale augmente avec la profondeur* partout où la condition $5b_0 > 3$ ou $5b_0 + \gamma < 3$ est satisfaite, ce qui est le cas général. Par exemple, au Transvaal $\left(\frac{b_0}{\gamma} \cong \frac{2}{5}\right)$ et au Lancashire ($b_0 \cong \gamma$), on a respectivement

$$V_d - V_0 = \frac{6}{2\gamma - 3}(\gamma - 1)V_0 \frac{d}{a} \quad \text{(Transvaal)}, \qquad V_d - V_0 = \frac{6}{5\gamma - 3}(2\gamma - 1)V_0 \frac{d}{a} \quad \text{(Lancashire)}. \qquad (46\,a, b)$$

On a donc dans les deux régions une *augmentation* de la composante verticale avec la profondeur puisque γ diffère peu de l'unité dans le cas de la Terre [la relation (46 *b*) montre d'ailleurs que l'on a $\gamma > 0{,}6$]. L'augmentation de V_d avec la profondeur est un argument puissant en faveur de la théorie exposée dans ce Mémoire parce qu'on peut montrer que toutes les théories du magnétisme terrestre qui postulent l'existence d'un noyau aimanté (ou un phénomène équivalent) conduisent à une diminution de la composante verticale ([4]).

14. **Champ électrostatique moyen de la Terre.** — Il existe autour du globe un champ électrostatique moyen dirigé vers la Terre dont l'intensité moyenne est de l'ordre de 100 V/m. A ce champ correspond une charge électrique superficielle négative d'environ 0,5 millions de coulombs. Cette charge se maintient constante à travers les siècles en dépit de la conductibilité moyenne de l'atmosphère qui devrait tendre à l'annuler en moins d'une heure. Malgré les nombreuses tentatives qui ont été faites depuis Peltier, on ne connaît pas la véritable origine du champ électrostatique de la Terre et la cause du maintien de sa charge reste mystérieuse. Conformément au résultat de notre théorie qui est exprimé par la relation (36) entre le champ de gravitation et le champ électrostatique, il nous semble que la véritable cause du maintien de la charge et du champ électrique moyen de la Terre doit être cherchée dans les rapports fondamentaux entre la gravitation et l'électromagnétisme qui ont été étudiés brièvement dans ce Mémoire et dont la formule (36) exprime un aspect. D'après cette formule, toute

([4]) Pour plus de détails sur le champ magnétique voir [5].

masse dont la gravitation propre n'est pas négligeable est accompagnée nécessairement d'un champ électrostatique. Il n'est d'ailleurs pas impossible que cet effet puisse expliquer aussi les champs électrostatiques intenses de certaines étoiles donnant lieu à l'expulsion de rayons cosmiques.

Manuscrit reçu le 11 mars 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Babcock H. W. — *Astroph. J.*, 1947, **105**, 105-119; *Publ. Astr. Soc. Pacif.*, 1947, **59**, 112-124; *Ibid.*, 1947, **59**, 260-261.

[2] Blackett P. M. S. — *Nature*, 1947, **159**, 658-666.

[3] Broglie L. de. — *Une nouvelle théorie de la lumière*, Hermann, Paris, 1940 et 1942.

[4] Gião Ant. — *Portugaliae Physica*, 1946, **2**, 1-98; *Portugaliae Mathematica*, 1946, **5**, 145-192; *Ibid.*, 1947, **6**, 67-114; *Ibid.*, 1948, **7**, 1-44; *Bul. Soc. Port. Mat.*, (A), 1947, 29-40; *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 454, 1212, 1275; 1948, **226**, 1177, 2051.

[5] Gião Ant. — *C. R. Acad. Sc.*, 1947, **224**, 1813; 1947, **225**, 924; 1948, **226**, 645, 1298; *Gazeta de Mat.* (Lisbonne), 1947, **34**; 1948, **35**.

[6] Gião Ant. — *C. R. Acad. Sc.*, 1948, **226**, 2126.

[7] Hales A. L. and Gough D. I. — *Nature*, 1947, **160**, 746.

[8] Runcorn S. K. — *Month. Not. Roy. Astr. Soc. Geophys. Supp.*, 1948.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM. SÉRIE VIII, TOME X, JUILLET-AOÛT-SEPTEMBRE 1949.

ÉVALUATION DE LA TENEUR EN URANIUM DES MINERAIS PAR LA MESURE DES RAYONNEMENTS NUCLÉAIRES

Par J. THOMMERET.

Institut du Radium et Commissariat à l'Énergie atomique, Service de Chimie générale.

Sommaire. — Mise au point d'une méthode d'évaluation directe des teneurs en uranium des minéraux exempts de thorium par deux mesures d'activité à l'aide de deux compteurs de Geiger.

1. **Historique**. — On sait depuis longtemps que l'on peut évaluer grossièrement la teneur en uranium d'un minerai par mesure directe de sa radioactivité à l'aide d'une chambre d'ionisation [1].

Cependant, dans de telles mesures, l'ionisation produite par les rayons α de l'uranium et de ses descendants est très variable selon la nature du minerai, la grosseur des grains, et surtout l'état d'équilibre radioactif. Celui-ci dépend de l'âge de formation du minéral et peut être plus ou moins perturbé suivant les traitements préalables subis par le minerai en place, ou après extraction (lavage, flottation, etc.), de sorte qu'il est à peu près impossible de déterminer convenablement ainsi la teneur en uranium.

Ayant à déterminer chimiquement la teneur en U de toute une série de minerais d'origine connue (Lachaux, Grury, Saint-Symphorien), j'avais, dès 1946-1947, tracé des courbes permettant, d'après la radioactivité des divers échantillons, d'en connaître la richesse en U avec une bonne approximation.

Après avoir finement pulvérisé (maille 200) une prise de 1 g, je l'étalais sur 8 cm² et mesurais l'activité à l'aide d'un compteur de Geiger-Muller (paroi en aluminium de 1/10ᵉ de millimètre d'épaisseur). J'étalonnais la courbe par quelques analyses chimiques soignées.

Cette méthode n'est valable que pour des minerais reconnus et non traités mécaniquement en vue d'un enrichissement. Dans le cas contraire, en effet, on enregistre des variations d'activité dues au non-équilibre radioactif entre l'uranium, le radium, le radon et le dépôt actif du radium. Or, la détermination de la teneur en uranium des minerais traités mécaniquement est de très grand intérêt pratique. Aussi, suivant les conseils de Mme Joliot-Curie, j'ai cherché une méthode éliminant les variations précédentes.

2. **Principe de la méthode**. — On peut considérer que, pratiquement, dans la famille de l'uranium, seuls le radium et ses descendants émettent

des rayonnements γ. L'activité d'un minerai d'uranium peut être mesurée directement, mais on ne connaît pas la part qui revient à l'uranium seul.

Le problème revient donc à évaluer l'activité imputable au radium et à ses descendants contenus dans le minerai, et à la retrancher de l'activité obtenue dans une mesure globale.

L'activité due à l'uranium provient des rayons β de UX.

L'activité due au radium et à ses descendants provient à la fois des rayons β et des rayons γ. On peut mesurer l'activité provenant des rayons γ en absorbant les rayons β dans un écran.

D'autre part, dans le radium en équilibre avec ses descendants, le rapport de l'activité due aux rayons β à l'activité due aux rayonnements γ est constant. Soit k ce rapport.

Ayant déterminé l'activité γ du minerai et en supposant simplement que le radium y est en équilibre avec ses descendants (pratiquement il suffit de quelques heures pour que le radon soit en équilibre avec le dépôt actif), on déduit immédiatement l'activité β correspondante au radium.

Le principe de la méthode peut se formuler comme suit :

$$A_\beta(\mathrm{U}) = A_{(\beta+\gamma)} - A_\gamma - kA_\gamma.$$

Activité due à l'uranium X — Activité totale du minerai — Activité due au radium et à ses descendants

On peut même ne pas tenir compte de l'activité A_γ qui est mesurée globalement avec le rayonnement total $\beta + \gamma$, car les conditions géométriques des mesures peuvent être choisies telles que la proportion de rayons β enregistrés soit plus de 30 fois supérieure à celle des rayons γ.

Dans ce cas, on peut écrire l'égalité simplifiée

$$A_\beta \text{ de } \mathrm{U}X = A_\beta \text{ minerai} - kA_\gamma \text{ minerai},$$

kA_γ représente l'activité due au rayonnement β de Ra et de ses descendants et peut donc être déterminée par une mesure indépendante.

Deux mesures suffisent donc pour déterminer l'intensité du rayonnement β dû à l'uranium X.

Un étalonnage donnera alors directement la teneur en uranium en fonction de l'activité calculée. Comme le rayonnement β de l'uranium provient en fait de l'UX, on suppose évidemment que l'uranium est en équilibre avec UX_1, ce qui est le cas des minerais n'ayant pas subi d'attaque chimique récente (période de $UX_1 = 24{,}2$ jours).

3. **Mode opératoire**. — Les mesures d'activité ont été faites avec des compteurs de Geiger en verre du type classique.

L'appareil servant à enregistrer les activités est une échelle de 100 du type classique à laquelle on adapte un commutateur à deux voies permettant de passer d'un compteur à l'autre pour chaque sorte de mesure.

La détermination du rapport k dans un sel de radium peut être effectuée une fois pour toutes dans les conditions où l'on opère. J'ai utilisé, pour cette détermination, le sel étalon préparé par Mlle C. Chamié et M. Yovanovitch [2] au Laboratoire Curie il y a plus de 25 ans. Ce sel est constitué par une dilution très homogène de carbonate de radium exempt de mésothorium, dans du carbonate de baryum. Il contient $5{,}6 \cdot 10^{-7}$ g de radium par gramme de sel. On peut considérer qu'il a atteint son équilibre radioactif bien que ce ne soit pas absolument exact à cause de la longue période du radium D.

Un gramme de ce sel étalon, mélangé à 99 g de sable siliceux broyé finement, constitue l'équivalent d'un minerai qui ne contiendrait pas d'uranium, mais seulement du radium.

En effet, 100 g d'un minerai à 1 pour 100 d'uranium contiennent environ $3{,}5 \cdot 10^{-7}$ g de radium, teneur du même ordre de grandeur que celle de notre mélange.

On détermine le rapport $k = \dfrac{A_\beta}{A_\gamma}$ pour cet étalon radifère par une mesure sur chacun des compteurs.

Ce coefficient k dépend évidemment des compteurs employés. Il doit être redéterminé chaque fois que l'on remplace un de ces compteurs. L'expérience a montré que ce rapport est invariable tant que chaque compteur conserve un plateau suffisant.

Mesure de l'activité due aux rayonnements γ. — Pour obtenir des intensités de rayonnements γ acceptables, on a été conduit à prendre 100 g de l'échantillon. On place ces 100 g dans un manchon cylindrique d'acier entourant un compteur vertical.

Ce manchon a un diamètre intérieur de 44 mm. Il est coaxial avec le compteur, lequel est entouré d'une paroi d'acier de 1,5 mm d'épaisseur, suffisante pour arrêter tous les rayons β.

Les 100 g de minerai sont répartis sur une hauteur de 10 cm environ selon la densité, dans l'espace annulaire du manchon cylindrique (épaisseur de la couche annulaire 8 mm).

Mesure de l'activité due aux rayonnements β. — La mesure en rayonnement β est effectuée sur une couche épaisse de 3 mm environ et de 16 cm² de surface. On s'efforce de maintenir le poids de cette couche constant et égal à 5 g. Sa surface doit être la plus régulière possible.

Le minerai à mesurer doit être broyé fin (maille 150).

Le broyage provoquant parfois un dégagement d'émanation dans le minerai, l'équilibre radioactif entre le radon et ses dérivés se trouve rompu et l'on a observé que certaines activités mesurées par les rayons β augmentaient progressivement après broyage, mais, en général, assez peu (5 à 6 pour 100 au plus). Il est donc prudent de ne faire la mesure

que le lendemain du broyage si l'on veut éviter des erreurs de l'ordre de 5 à 10 pour 100.

Avant chaque série de mesures, on s'assure de l'activité d'un étalon spécialement construit pour chacun des compteurs. Chaque mesure doit être corrigée en fonction de l'activité enregistrée pour l'étalon.

La méthode perd de sa précision pour des teneurs en uranium inférieures au 1/1000e. Les activités mesurées sont alors de l'ordre de grandeur du mouvement propre et les fluctuations statistiques sont très importantes.

Pour les minerais d'une teneur de l'ordre de 4 pour 100 et au-dessus, les activités mesurées sont telles qu'il est préférable de diluer le minerai riche dans un excipient siliceux inactif.

Si b et g sont les activités (respectivement en β et γ) du minerai pour chacune des mesures, on a

$$T = C(b - kg).$$

T, teneur en uranium en pour 100;
k, coefficient déterminé avec sel de Ra étalon;
C, coefficient déterminé par l'expérience.

4. **Détermination de** C. — On prend de l'oxyde d'urane U_3O_8 préparé depuis au moins six mois. On le dilue dans un stérile siliceux de façon à obtenir une série de quelques échantillons de titre variant entre 0,5 et 4 pour 100. On trace la courbe donnant la concentration en fonction de l'activité mesurée comme il a été dit (l'activité γ doit ici être sensiblement négligeable).

La pente de la droite obtenue donne le nombre C.

5. **Avantages de la méthode**. — Elle permet une évaluation presque immédiate de la teneur approchée, sans aucune manipulation chimique et en conservant les échantillons intacts (sauf dans le cas des concentrations supérieures à 4 pour 100).

Les erreurs que l'on commet sont fonctions, d'une part de la précision des mesures, d'autre part de la nature du minéral étudié.

La qualité de la surface et la finesse des grains ont une influence notable sur la mesure de l'activité due aux rayons β. Celle-ci peut varier de 1 à 2 pour 100 suivant les conditions de l'expérience.

Les erreurs de fluctuations statistiques des intensités de rayonnement sont de l'ordre de $\sqrt{N}$ (N, nombre d'impulsions enregistrées). On aura donc avantage à compter un nombre d'impulsions suffisant qui sera de l'ordre de quelques milliers pour avoir une bonne précision.

Toutes ces causes modifient les résultats et contribuent à donner une marge d'erreur relative de $\pm$ 10 pour 100 au maximum.

Le tableau suivant donne quelques résultats et leur comparaison avec le dosage chimique :

		Analyse (% U)		Erreur (% U)	
N°	Nature de l'échantillon.	chimique.	par rayonnt.	absolue.	relative.
1.	Autunite + produits jaunes (*) (concentré de table).	10,30	9,9	—0,4	— 4
2.	» » (»).	9,6	9,9	+0,3	+ 3
3.	Chalcolite (concentré de table)	8,6	8,25	—0,35	— 4,1
4.	» (»)	11,85	12	+0,15	+ 1,3
5.	Autunite + produit jaune (tout venant)	1,06	1,09	+0,03	+ 3
6.	» » (»)	0,255	0,27	+0,015	+ 5,8
7.	» » (»)	1,85	2,05	+0,2	+ 9,2
8.	» » (»)	4,65	4,52	—0,13	— 2
9.	Autunite (tout venant)	0,95	0,95	0	0
10.	Chalcolite + produits jaunes (concentré de table)	10	9,17	—0,83	— 8,3
11.	» » (mixtes de table)	1,75	1,45	—0,30	—17,1
12.	Minerai AEF (min. très dense, type mal déterminé).	0,50	0,40	—0,1	—20
13.	Pechblende décomposée + autunite	3,74	3,72	—0,02	— 1
14.	Boue radioactive	0,135	0,082	—0,053	—38
15.	Pechblende	20,60	20,38	—0,22	— 1,1
16.	» décomposée + autunite	0,81	0,78	—0,03	— 3,7
17.	Autunite (concentré de table)	9,4	9,8	+0,4	+ 4,2
18.	» (»)	8,15	8,01	—0,14	— 1,8
19.	» (»)	8,60	8,50	—0,10	— 1,2
20.	» (»)	7,2	6,5	—0,7	— 1
21.	» (concentré de flottation)	28	25,5	—2,5	—10
22.	Pechblende décomposée	0,85	0,87	+0,02	+ 2,3
23.	» »	0,68	0,71	+0,03	+ 4,4
24.	» »	1,33	1,24	—0,09	— 7,2
25.	» »	0,45	0,44	—0,01	— 2,1
26.	» »	0,08	0,056	—0,03	—37
27.	» + autunite	17,89	17,73	—0,16	— 1

(*) On appelle « produits jaunes » des minéraux secondaires comprenant des phosphates, silicates, vanadates d'uranium.

La validité de la méthode ne dépend pas de la concentration en uranium. Cependant, dans le cas des très faibles teneurs, les fluctuations sont plus sensibles et les perturbations extérieures influent beaucoup plus sur les résultats. Ce qui peut expliquer la moins bonne concordance avec l'analyse chimique que l'on constate dans le cas des minerais très pauvres (teneur inférieure à 0,1 pour 100. Cas des nos 14 et 26).

Pour des minerais à faible teneur (inférieure à 0,5 pour 100) et très denses, les conditions géométriques de la mesure en rayonnement β étant modifiées, l'auto-absorption augmentée, la teneur calculée est notablement plus faible que la teneur réelle (cas du no 12).

6. **Cas particulier**. — Dans le cas de résidus provenant de minerais dont l'uranium avait été extrait par traitement chimique, il m'est arrivé de trouver, par la méthode ici décrite, une forte teneur en uranium qui n'était pas confirmée par l'analyse chimique.

En suivant les variations avec le temps de l'activité d'un tel résidu et en déterminant l'absorption des rayonnements dans le cuivre et l'aluminium, j'ai pu mettre en évidence qu'il s'agissait de l'uranium X_1. En effet, UX_1 isotope du thorium reste presque entièrement insoluble dans diverses attaques qui solubilisent complètement l'uranium.

Si l'attaque du minerai est chlorhydrique ou nitrique et s'il ne contient ni sulfures ni sulfates, UX_1 passe entièrement en solution et ne se retrouve pas dans le résidu.

7. **Inconvénients de la méthode**. — 1° Les calculs précédents ne sont légitimes que pour des minerais exempts de thorium. En présence de celui-ci la teneur calculée est inférieure à la teneur réelle en uranium en raison de la prépondérance de rayonnements γ dus aux descendants du thorium.

2° Les minerais contenant des éléments de forte densité se répartissent mal en couche épaisse. La mesure en rayonnement β est faussée du fait que les conditions géométriques indiquées ci-dessus ne sont pas respectées lors de la mesure.

Il en va de même pour les minerais à faible densité qui occupent des volumes supérieurs à ceux rencontrés habituellement. On ne peut pas alors en placer la quantité requise dans les porte-échantillons.

Ces inconvénients disparaissent pour des teneurs supérieures à 1 pour 100, car on fait alors des dilutions avec des stériles convenables.

3° La teneur en potassium du minerai n'influe que peu sur les résultats. Cet élément est d'ailleurs assez peu abondant et son rayonnement mou s'élimine très facilement par absorption.

8. **Conclusion**. — La méthode décrite permet de doser l'uranium dans les minerais exempts de thorium par deux mesures de radioactivité sur un échantillon de 100 g broyé finement. Ces deux mesures peuvent être faites avec des compteurs de Geiger-Muller.

Cette méthode s'applique à tous les minerais naturels ou n'ayant subi que des traitements mécaniques (lavage, flottation, tamisage, etc.), à l'exception de traitements chimiques.

Les minerais dont la teneur est supérieure à 4 pour 100 doivent être dilués dans un stérile, de façon à ramener l'activité des échantillons mesurés à une valeur compatible avec les appareils utilisés. Les minerais à très faible teneur (inférieure à 1 pour 1000) ne peuvent être dosés que très approximativement.

Manuscrit reçu le 16 mars 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Curie M. — *Le Radium et les Radioéléments*, édition Baillère, 1925.

[2] *C. R. Acad. Sc.*, 1922, **175**, 266.

SUR LA SENSIBILITÉ LIMITE DES GALVANOMÈTRES

Par M. SURDIN.
Laboratoires du Fort de Chatillon, Commissariat à l'Énergie Atomique.

Sommaire. — On établit la formule donnant le « spectre d'intensité » du couple brownien qui agit sur un système mécanique ou électrique satisfaisant à une équation différentielle linéaire de deuxième ordre et ayant un seul degré de liberté.

On montre ensuite que la sensibilité limite d'un galvanomètre reste la même si le circuit de mesure est ouvert ou fermé.

Introduction. — On sait que la sensibilité d'un galvanomètre est limitée par des fluctuations dues aux deux effets suivants :

1° Chocs des particules de gaz contre l'équipage mobile.

2° Fluctuations électriques (effet Johnson) dans le circuit de mesure.

La sensibilité limite des galvanomètres a déjà fait l'objet de plusieurs études, en particulier par Firestone [1] et Van Lear [2]. Plus récemment, Strong [3] en décrivant un nouveau type de galvanomètre a repris la discussion de la sensibilité limite des galvanomètres en considérant séparément les effets mentionnés plus haut.

Il semble cependant, qu'il ne soit pas possible de séparer les deux effets qui coexistent quand le galvanomètre est fermé sur le circuit de mesure. Le but de la présente Note est d'étudier la sensibilité limite des galvanomètres et de montrer que la fluctuation totale du galvanomètre doit rester la même si le circuit de mesure est ouvert ou fermé.

Le « spectre d'intensité » du couple brownien. — Soit

$$I\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + C\theta = K(t), \tag{1}$$

l'équation de l'équipage mobile du galvanomètre, où :

θ est l'angle de déviation;
I, le moment d'inertie;
f, le coefficient de frottement (le terme dissipatif);
C, la constante de torsion;
$K(t)$, le couple fluctuant, dû au mouvement brownien des particules gazeuses qui frappent l'équipage.

Avec Bernamont [4], nous désignerons par « fonction de transfert » à la fréquence ν, la quantité A_ν donnée par

$$A_\nu^2 = \frac{\overline{\theta_\nu^2}}{\overline{K_\nu^2}}, \tag{2}$$

$\overline{\theta_\nu^2}$ est le carré moyen de la fluctuation de θ à la fréquence ν, pris dans une bande passante unité; $\overline{\theta_\nu^2}$ représente l'intensité spectrale de θ.

$\overline{K_\nu^2}$ est l'intensité spectrale du couple fluctuant.

Calculons $\overline{K_\nu^2}$.

On a

$$\overline{\theta^2} = \int_0^\infty \overline{\theta_\nu^2}\,d\nu = \int_0^\infty A_\nu^2\,\overline{K_\nu^2}\,d\nu. \tag{3}$$

Quand l'intervalle de temps moyen qui s'écoule entre deux chocs successifs des particules gazeuses contre l'équipage est petit par rapport à la période du galvanomètre (1), on peut écrire [4]

$$\overline{K_\nu^2} = 4\int_0^\infty \overline{KK_\tau}\,d\tau, \tag{4}$$

où $\overline{KK_\tau}$ est la fonction de corrélation de K.

L'équation (4) signifie que l'intensité spectrale de K est indépendante de la fréquence ν, tant que le temps de corrélation (intervalle de temps entre deux chocs) est petit par rapport à la période du galvanomètre.

Dans ces conditions, l'équation (3) peut s'écrire (2)

$$\overline{\theta^2} = \overline{K_\nu^2}\int_0^\infty A_\nu^2\,d\nu. \tag{5}$$

Admettons que l'équipage est en équilibre thermique avec le milieu ambiant à la température absolue T. L'équipage ayant un seul degré de liberté, d'après le *Principe d'équipartition* il a une énergie cinétique et une énergie potentielle moyennes égales chacune à $\frac{1}{2}kT$, où k est la constante de

(1) Cette condition est généralement satisfaite.

(2) Remarquons en passant que la « bande passante efficace » du galvanomètre est

$$F = \int_0^\infty \frac{A_\nu^2}{A_{\nu_0}^2}\,d\nu,$$

où $A_{\nu_0}^2$ est la fonction de transfert à la fréquence de résonance.

Boltzmann. On a ainsi

$$\frac{1}{2} C \overline{\theta^2} = \frac{1}{2} kT \quad \text{et} \quad \overline{\theta^2} = \frac{kT}{C}. \tag{6}$$

Portons l'équation (6) dans (5); il vient

$$\overline{K_\nu^2} \int_0^\infty A_\nu^2 \, d\nu = \frac{kT}{C}. \tag{7}$$

Pour calculer A_ν^2 remarquons que l'équation (1) est un cas particulier d'une équation plus générale de la forme

$$\sum_m a_m \frac{d^m \theta}{dt^m} = \sum_i b_i \frac{d^i K}{dt^i}. \tag{8}$$

Bernamont [4] a montré que, pour un système satisfaisant à une équation du type (8), on a

$$A_\nu^2 = \frac{\sum_{i,j} (p)(-1)^{\frac{i-j}{2}} \omega^{i+j} b_i b_j}{\sum_{m,n} (p)(-1)^{\frac{m-n}{2}} \omega^{m+n} a_m a_n}, \tag{9}$$

où $\omega = 2\pi\nu$ et $\sum_{m,n}(p)$ est une somme étendue à tous les termes pour lesquels $m+n$ est pair; les termes pour lesquels $m \neq n$ doivent être comptés deux fois.

Appliquons l'équation (9) au cas présent; il vient

$$A_\nu^2 = \frac{1}{f^2\omega^2 + (I\omega^2 - C)^2}. \tag{10}$$

Combinant les équations (7) et (10), on obtient

$$\frac{kT}{C} = \frac{\overline{K_\nu^2}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega}{f^2\omega^2 + (I\omega^2 - C)^2} = \frac{\overline{K_\nu^2}}{2\pi} \frac{\pi}{2fC} = \frac{\overline{K_\nu^2}}{4fC},$$

d'où

$$\overline{K_\nu^2} = 4fkT. \tag{11}$$

L'équation (11) donne l'intensité spectrale du couple brownien. Elle est de la même forme que celle donnant l'intensité spectrale de la f. é. m. de fluctuations thermiques dans une résistance R, c'est-à-dire

$$\overline{e_\nu^2} = 4RkT. \tag{12}$$

On voit que si le système est en équilibre thermique, a un seul degré de liberté, satisfait à une équation différentielle de la forme (1) et que si le temps de corrélation est petit par rapport à la période propre du système, l'intensité spectrale de la force fluctuante est égale à $4\,kT$ fois le terme dissipatif. Ceci s'applique tant aux systèmes électriques qu'aux systèmes mécaniques.

Calcul de $\overline{\theta^2}$ quand le couple brownien et les fluctuations thermiques coexistent. — Dans ce qui précède l'expression de l'intensité spectrale du couple brownien a été établie dans l'hypothèse où les fluctuations thermiques n'intervenaient pas. Dans ce qui suit, l'action des deux effets sera prise en considération.

Soit R la résistance totale du circuit de mesure, L sa self-inductance, Φ le flux embrassé par le cadre et $e(t)$ la f. é. m. de fluctuations dues à l'effet Johnson. L'équation du galvanomètre devient alors

$$I\ddot{\theta} + \left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right)\dot{\theta} + C\theta = K(t) + \frac{\Phi}{R} e(t), \tag{13}$$

où l'on a négligé les termes de l'ordre $\frac{L\omega}{R}$. $\frac{\Phi^2}{R}$ est l'amortissement électrique du galvanomètre.

On admet que $K(t)$ et $e(t)$ sont indépendants, dans ces conditions, on peut écrire

$$\overline{\theta^2} = \int_0^\infty \left(\overline{K_\nu^2} + \frac{\Phi^2}{R}\overline{e_\nu^2}\right) A_\nu^2 \, d\nu. \tag{14}$$

D'autre part, on a

$$\overline{K_\nu^2} = 4fkT,$$
$$\overline{e_\nu^2} = 4RkT$$

et, en tenant compte de (9), l'équation (14) devient

$$\overline{\theta^2} = \frac{4kT}{C}\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right)\omega^2 + (I\omega^2 - C)^2}. \tag{15}$$

Après intégration, il vient

$$\overline{\theta^2} = \frac{4kT}{2\pi}\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right) \frac{\pi}{2C\left(f + \frac{\Phi^2}{R}\right)} = \frac{kT}{C}. \tag{16}$$

D'après l'équation (16), on voit que la fluctuation totale du galvanomètre $\overline{\theta^2}$ est indépendante du coefficient de frottement f et de la résistance électrique totale du circuit. En particulier, elle est la même si le circuit est ouvert ou fermé.

Manuscrit reçu le 20 mars 1949.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] FIRESTONE F. A. — *Rev. Sci. Inst.*, 1932, **3**, 163.
[2] VAN LEAR G. A. — *Rev. Sci. Ins.*, 1933, **4**, 21.
[3] STRONG J. — *Rev. Mod. Phys.*, 1948, **20**, n° **1**, 180.
[4] BERNAMONT J. — *Ann. de Physique*, Paris, 1937, **7**, 71.

SUR LA VARIATION DU BRUIT DE FOND D'UN PHOTOMULTIPLICATEUR RCA 931 A AVEC LE POTENTIEL DE L'ENVELOPPE EN VERRE

Par M. CHRISTOPHER TAYLOR.
Commissariat à l'Énergie Atomique, Fort de Chatillon, Service des constructions électriques.

Sommaire. — On montre que le bruit de fond du photomultiplicateur RCA 931 A dépend du potentiel de son enveloppe en verre. En effet, le bruit est multiplié par un facteur de dix environ quand le potentiel de l'enveloppe diffère de celui de la photocathode de — 500 V ou de + 1000 V. Une théorie du phénomène est proposée.

Pour les applications exigeant un bruit de fond réduit, par exemple le comptage de particules par scintillations, il faut maintenir le verre au potentiel de la photocathode.

Le photomultiplicateur RCA 931 A peut être utilisé pour déceler les scintillations excitées dans un écran convenable bombardé par des particules à détecter [1]. Ces impulsions lumineuses étant très faibles, il est important que le bruit de fond du multiplicateur soit le plus réduit possible. Différents expérimentateurs ont noté une augmentation du bruit de fond quand on touche l'enveloppe en verre d'un photomultiplicateur monté avec sa cathode négative par rapport à la masse [(1), p. 750].

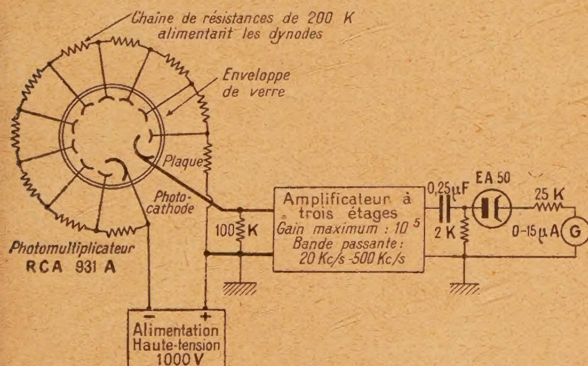


Fig. 1.

Nous avons étudié l'origine de ce phénomène et nous avons trouvé qu'il est causé par des scintillations sur la surface intérieure de l'enveloppe.

Le tube RCA 931 A comporte neuf étages de multiplication, ayant un gain total de 10^6. Le système des électrodes est monté dans une enveloppe cylindrique en verre d'environ 5 cm de longueur, les onze électrodes sont reliées aux broches individuelles montées sur un culot en matière plastique.

L'ensemble général ressemble à celui d'une lampe de réception. Le tube est normalement connecté comme le montre la figure 1, la tension entre chaque électrode de multiplication (dynode) étant de 100 V et la cathode étant à — 1000 V par rapport à la masse.

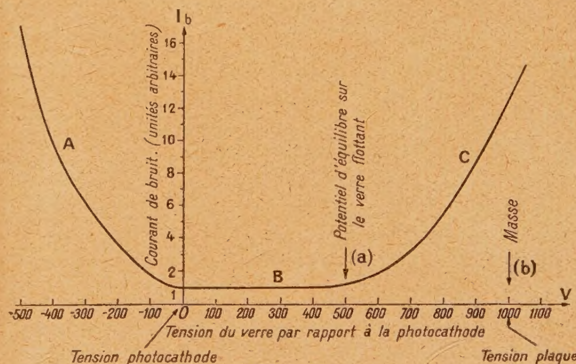


Fig. 2.

Pour faire des mesures comparatives de bruit, nous nous sommes servis du montage de la figure 1. Après amplification, le courant de bruit est redressé par une diode et mesuré avec le galvanomètre G. Le courant ainsi mesuré, *Ib*, constitue une mesure du bruit de fond suffisante pour des études comparatives.

Pour mesurer le potentiel de l'enveloppe dans des conditions normales d'utilisation, nous avons entouré le multiplicateur d'un anneau métallique à la jonction du verre et du culot. Le courant sur la surface du verre suffit pour charger un voltmètre électrostatique relié à cet anneau en moins d'une seconde : on constate que le verre prend un potentiel intermédiaire entre ceux de la plaque et de la cathode. Cet état d'équilibre propre est indiqué par une flèche (*a*) sur la figure 2. Quand on touche le verre, il se trouve relié à la masse par une résistance rela-

(1) MARSHALL, COLTMAN and BENNETT, *Rev. Sci. Inst.*, 1948, **19**, p. 744-770.

tivement faible et son potentiel monte jusqu'à celui de la masse.

Nous avons fait varier le potentiel du verre, en appliquant entre la cathode et l'anneau une tension V réglable entre -500 V et $+1000$ V. Avec ce dispositif, nous avons mesuré le courant Ib pour plusieurs valeurs de la tension V. On trouve, pour chaque photomultiplicateur, une courbe de la forme représentée sur la figure 2 ([2]).

Nous avons supposé d'abord que l'augmentation de bruit observée provenait, soit d'une variation du gain du multiplicateur, soit de courants de fuite entre broches :

1° Quand on touche l'enveloppe, la redistribution de charges résultante pourrait faire varier la concentration du faisceau électronique, ce qui ferait varier son gain. Nous avons donc éclairé la photocathode avec une source lumineuse faible et mesuré le courant plaque du multiplicateur pour quelques valeurs de V. Nous avons trouvé que le gain restait constant dans toute la région qui nous intéresse.

2° L'augmentation du potentiel du verre pourrait changer les courants de fuite entre les broches du culot, de telle sorte que le courant qui arrive à la broche de la plaque en soit augmenté. Nous avons observé, qu'en rendant les premières dynodes plus négatives que la cathode, les courants de bruit des trois régions A, B et C de la figure 2 sont supprimés. Par conséquent, le bruit existe déjà comme courant d'émission de la photocathode.

Nous avons finalement supposé que le bruit C serait dû à une fluorescence du verre, dont le mécanisme serait le suivant : les électrons libérés par la photocathode et par des traces de substances photoémissive qui peuvent se trouver sur l'extérieur des dynodes seraient attirés par le verre, qui est porté à une tension positive par rapport à la plupart des électrodes : ces électrons produisent, dans le verre, des scintillations, qui sont détectées par la photocathode. Pour contrôler cette hypothèse, nous avons monté un deuxième photomultiplicateur (que nous appellerons tube II), avec sa photocathode en face du tube en observation (tube I). Nous avons observé, dans le tube II, une augmentation de bruit quand le tube I était dans la région C, mais aucun accroissement quand I était dans les régions A ou B. Si un écran opaque est interposé entre I et II, on ne trouve aucun effet dans II, quelle que soit la région où se trouve le tube I. Le bruit C serait donc dû à une fluorescence du verre.

([2]) Un article de MORTON and MITCHELL, *R. C. A. Review*, décembre 1948, **9**, p. 632-642, donnant sans interprétation une courbe analogue à celle de la figure 2, vient d'être porté à notre connaissance.

La constance du bruit dans la région B semble montrer que celui-ci a son origine dans l'émission thermique normale de la photocathode.

Le bruit A (*fig.* 2) serait dû à l'émission thermique d'électrons par les traces photoémissives déposées sur la face intérieure de l'enveloppe. En effet, quand le potentiel du verre est négatif par rapport à la photocathode, celle-ci attire ces électrons qui y produisent des groupes d'électrons secondaires, indépendamment de l'émission thermique « normale » de la photocathode : le processus normal d'amplification se retrouve ensuite.

En comparant la forme des impulsions des bruits A, B et C sur un oscillographe cathodique, nous avons remarqué une proportion d'impulsions de grande amplitude dans le bruit A qui est anormalement grande par rapport à celle existant dans les bruits B et C : celles-ci peuvent être causées par le processus de multiplication sur la cathode que nous venons de décrire.

Pour contrôler cette hypothèse, nous avons chauffé le tube en l'entourant d'un fil résistant dissipant 5 W environ. La température de l'enveloppe croît plus rapidement que celle des électrodes, ce qui doit avoir pour effet de favoriser son émission thermique au début du chauffage. Nous avons appliqué à l'anneau les tensions correspondant aux régions A, B et C de la figure 2. Au bout de 2 minutes de chauffage le bruit A se trouvait multiplié par un facteur de l'ordre de 15, tandis que les bruits B et C étaient à peine doublés. Ainsi donc l'émission thermique de l'enveloppe est probablement la cause du phénomène.

Puisque les bruits supplémentaires que nous avons considérés ont pour origine des différences de potentiel entre l'enveloppe et la cathode, on peut les éliminer en les reliant, procédé facilement réalisable par l'emploi d'un anneau métallique en contact électrique avec l'enveloppe à la jonction du verre et du culot. Dans le cas où l'on utilise un blindage métallique relié à la masse, il faut surtout éviter que ce dernier touche le verre ou le culot, sous peine de produire le bruit C qui peut être dix fois plus grand que le bruit de fond normal du multiplicateur.

Manuscrit reçu le 18 mars 1949.

Le Gérant : MAURICE BLONDIN. 132977 IMP. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. — 1949.